

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ СИЛ ІНЕРЦІЇ
КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНІЗМУ
МАЛООБЕРТОВИХ ДИЗЕЛІВ

В.П. Савчук¹, Є.В. Білоусов², Ю.М. Кучеренко³, Д.В. Курносенко⁴

¹к.т.н., доцент кафедри експлуатації суднових енергетичних установок,
Херсонська державна морська академія, Одеса, Україна
ORCID ID: 0000-0002-5266-850X

²д.т.н., професор кафедри суднових енергетичних систем та комплексів,
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна
ORCID ID: 0000-0001-8185-8209

³к.т.н., доцент кафедри суднових енергетичних систем та комплексів
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна
ORCID: 0000-0002-1568-165X

⁴старший викладач кафедри експлуатації суднових енергетичних установок,
Херсонська державна морська академія, Одеса, Україна
ORCID ID: 0000-0003-3417-8766

Анотація

Вступ. Впровадження концепцій Індустрії 4.0 та технологій цифрових двійників (Digital Twins) у суднову енергетику вимагає переходу від класичних спрощених моделей динаміки до прецизійних алгоритмів, здатних працювати в режимі реального часу. Забезпечення безвідмовності сучасних малообертових дизелів (МОД) залежить від точного визначення інерційних навантажень, які визначають ресурс підшипників та вібраційну активність двигуна. **Мета:** розробка та обґрунтування прецизійного алгоритму розрахунку динамічних навантажень у КШМ малообертових двигунів шляхом порівняльного аналізу багатомасових моделей та уточнення кінематичних залежностей для їх подальшої інтеграції в цифрові двійники суднових енергетичних установок. **Результати.** У роботі виконано порівняльний аналіз точності розрахунку сил інерції та реакцій у підшипниках КШМ із використанням класичної двомасової моделі, вдосконаленої двомасової моделі з коригувальним моментом та тримасової моделі. Для підвищення точності аналітичних розрахунків запропоновано застосування уточненої формули визначення прискорення поршня, яка враховує вищі гармоніки та забезпечує приріст точності у пікових точках на 3...5 % при значеннях $\lambda \approx 0,5$. Дослідження проведено на прикладі двигуна MAN B&W 6S46ME-B8.5 із верифікацією масо-інерційних характеристик у середовищі SolidWorks. Встановлено, що класична двомасова модель має систематичну похибку визначення моменту інерції шатуна до 30 %, що викривлює значення бічних сил. Вдосконалена двомасова модель, хоч і забезпечує точність середніх значень, генерує нефізичні сплески навантажень через різкі зміни кутового прискорення, що є критичним для систем діагностики. Тримасова модель продемонструвала найкращі результати: похибка відносно еталонних значень не перевищує 1...2 %, а графіки сил



залишаються фізично коректними. **Висновки.** Доведено, що тримасова модель є оптимальною для використання в ядрі цифрових двійників МОД, оскільки поєднує точність методів скінченних елементів (FEM) із високою обчислювальною швидкістю зосереджених параметричних моделей.

Ключові слова: малообертовий дизель, кривошипно-шатунний механізм, сили інерції, цифровий двійник, тримасова модель, динаміка двигуна.

ANALYSIS OF THE ACCURACY OF METHODS FOR CALCULATING THE INERTIA FORCES OF THE CRANK-CONNECTING ROD MECHANISM OF LOW-SPEED DIESEL ENGINES

V.P. Savchuk¹, Ie.V. Bilousov², Yu. M. Kucherenko³, D.V. Kurnosenko⁴

¹ Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
of the Department of Vessel's Power Plants Operation,
Kherson State Maritime Academy, Odesa, Ukraine
ORCID ID: 0000-0002-5266-850X

² Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department
of Vessel's Energy Systems and Complexes,
Odessa National Maritime University, Odesa, Ukraine
ORCID ID: 0000-0001-8185-8209

³ Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
of the Department of Vessel's Energy Systems and Complexes
Odessa National Maritime University, Odesa, Ukraine
ORCID ID: 0000-0002-1568-165X

³ Senior Lecturer of the Department of Vessel's Power Plants Operation,
Kherson State Maritime Academy, Odesa, Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-3417-8766

Summary

Introduction. The implementation of Industry 4.0 concepts and Digital Twin technologies in marine engineering necessitates a transition from classical simplified dynamic models to precision algorithms capable of real-time operation. The reliability of modern long-stroke low-speed engines (LSE) depends on the accurate determination of inertial loads, which define bearing life and engine vibration activity. **Purpose:** development and justification of a precision algorithm for calculating dynamic loads in the crank mechanism of low-speed engines through comparative analysis of multi-mass models and refinement of kinematic dependencies for their further integration into digital twins of ship power plants. **Results.** The paper presents a comparative analysis of the accuracy in calculating inertia forces and bearing reactions using the classical two-mass model, an improved two-mass model with a corrective moment, and a three-mass model. To enhance analytical precision, a refined formula for piston acceleration is proposed. It accounts for higher harmonics, improving accuracy at peak points by 3...5 % for crank-to-connecting rod ratios $\lambda \approx 0,5$. The study is based on the MAN B&W 6S46ME-B8.5 engine, with mass-inertia characteristics verified using SolidWorks. It was found that the classical two-mass model exhibits a systematic error in determining the connecting rod's moment of inertia of up to 30 %, distorting the side force values. While the improved two-mass model provides accurate average values, it generates non-physical load spikes due to rapid changes in angular acceleration, posing risks

for diagnostic systems. The three-mass model showed the best performance: the error relative to reference values does not exceed 1...2 %, and the force plots remain smooth and physically correct. **Conclusions.** The study proves that the three-mass model is optimal for the core of LSE Digital Twins, as it combines the accuracy of Finite Element Methods (FEM) with the computational efficiency of lumped parameter models.

Keywords: low-speed engine, crank-connecting rod mechanism, inertia forces, Digital Twin, three-mass model, engine dynamics.

Вступ. Сучасна морська індустрія переживає фундаментальну трансформацію, зумовлену переходом до концепції Індустрії 4.0. Традиційні підходи до експлуатації суднових енергетичних установок, що базувалися на планово-попереджувальних ремонтах та періодичному обслуговуванні, поступово поступаються місцем стратегіям обслуговування за фактичним станом (Condition-Based Maintenance – CBM) із застосуванням методів прогнозування залишкового ресурсу (Predictive Maintenance – PdM) [1; 2]. У цьому контексті забезпечення безвідмовності мало-оберткових дизелів (МОД), які є основним типом пропульсивних установок для великотоннажного флоту, стає критичною інженерною задачею. Кривошипно-шатунний механізм (КШМ) є кінематичним серцем двигуна внутрішнього згоряння, трансформуючи енергію розширення газів у обертальний рух колінчастого валу. Водночас, КШМ є джерелом значних динамічних навантажень. Зворотно-поступальний рух масивних деталей – поршня, штока, крейцкопфа – генерує інерційні сили, які циклічно змінюють свій напрямок і величину. Ці сили, накладуючись на сили тиску газів, формують складний спектр навантажень на підшипникові вузли, викликають вібрації корпусу двигуна та судна в цілому, а також визначають втомну міцність деталей. Актуальність точного розрахунку цих сил зростає пропорційно до форсування двигунів. Сучасні довгохідні (long-stroke) та наддовгохідні (super-long-stroke) дизелі характеризуються високими значеннями середнього ефективного тиску та збільшеними масами рухомих деталей для забезпечення необхідного ходу поршня. У таких умовах навіть незначні похибки в математичних моделях, що використовуються для розрахунку динаміки, можуть призвести до критичних помилок у проектуванні підшипників або налаштуванні систем моніторингу [2–4].

Історично склалося так, що інженерна школа динаміки двигунів спиралася на спрощені аналітичні моделі. Професор А. Радціг у своїй фундаментальній праці 1933 року [5] систематизував методи приведення мас, запропонувавши двомасову модель заміщення шатуна як стандарт для інженерних розрахунків. Ця модель, де маса шатуна умовно розділяється на дві зосереджені маси (обертальну та зворотно-поступальну), дозволила значно спростити ручні розрахунки в докомп'ютерну еру. Моніторинг технічного стану підшипникових вузлів КШМ в реальному часі потребує найбільш повної інформації про робочі процеси. Датчики можуть надати інформацію про наслідки (вібрацію, температуру), але для розуміння причин (сил, що діють у змащувальному шарі) необхідна адекватна математична модель, яка працює в ядрі діагностичної системи. Класична двомасова модель фізично не здатна одночасно задовольнити умови збереження маси, положення центру мас та моменту інерції шатуна, що здійснює складний плоскопаралельний рух [6; 7]. Це призводить до систематичної похибки у визначенні моменту інерції шатуна,

що викривлює розрахункові значення бічних сил та реакцій у підшипниках. Для сучасних систем цифрових двійників, які прагнуть досягти точності прогнозування зносів та відмов, такі спрощення стають «слабкою ланкою».

Концепція цифрового двійника (Digital Twin – DT) передбачає створення віртуальної репліки фізичного активу, яка постійно оновлюється даними з реального об'єкта. У судновій енергетиці DT використовуються для оптимізації ефективності та технічного обслуговування із застосуванням методів прогнозування залишкового ресурсу. Ефективність цифрового двійника залежить від балансу між точністю моделі та швидкістю обчислень. Високоточні моделі (High-Fidelity) базуються на методі скінченних елементів (МСЕ/FEM) [8] або обчислювальній гідродинаміці (CFD). Вони забезпечують виняткову деталізацію напружень та деформацій, але вимагають значних обчислювальних потужностей і часу, що унеможливує їх використання в режимі online на бортовому обладнанні. Моделі на основі даних (Data-Driven): Використовують машинне навчання (ML) для пошуку кореляцій. Вони швидкі, але залежать від якості навчальних вибірок і часто не враховують фізичні обмеження системи. Зосереджені параметричні моделі (Lumped Parameter Models) займають проміжне положення. Вони базуються на фізичних рівняннях (Physics-Based), але використовують спрощення (зосереджені маси) для прискорення розрахунків. Саме в контексті зосереджених параметричних моделей для DT постає питання актуалізації методів розрахунку сил інерції.

Основна частина. Двомасова модель – це фундаментальна динамічна схема заміщення, що дозволяє звести складний плоскопаралельний рух шатуна до руху двох точкових мас, який можна розкласти на поступальний рух разом з його центром мас (ЦМ) і обертальний рух навколо осі, що проходить через ЦМ. Це означає, що шатун має три ступені свободи:

- лінійні координати ЦМ ($x_{цм}, y_{цм}$);
- кут повороту шатуна β навколо поршневого пальця (поперечини крейцкопфа для МОД)

Щоб система двох мас повністю відповідала реальному шатуну, повинні виконуватися три умови:

1. Збереження загальної маси:

$$m_1 + m_2 = m_{ш}, \quad (1)$$

- де m_1 – приведена маса в поршневій головці;
 m_2 – приведена маса в кривошипній головці;
 $m_{ш}$ – маса шатуна в зборі.

2. Збереження положення центру мас:

$$m_1 \cdot L_n = m_2 \cdot L_k, \quad (2)$$

- де L_n – відстань від ЦМ до осі поршневої головки (крейцкопфа);
 L_k – відстань від ЦМ до осі кривошипної головки;
 $L = L_n + L_k$ – довжина шатуна.

3. Збереження моменту інерції:

$$I_{ш}^{ц.м.} = m_1 \cdot L_n^2 + m_2 \cdot L_k^2, \quad (3)$$

- де $I_{ш}^{ц.м.}$ – момент інерції шатуна відносно його власного центру мас.

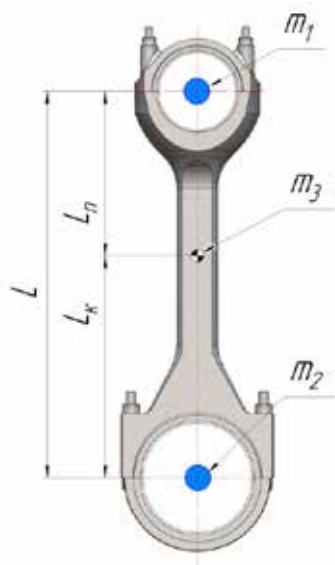


Рис. 1. Схема визначення положення мас та довжин шатуна

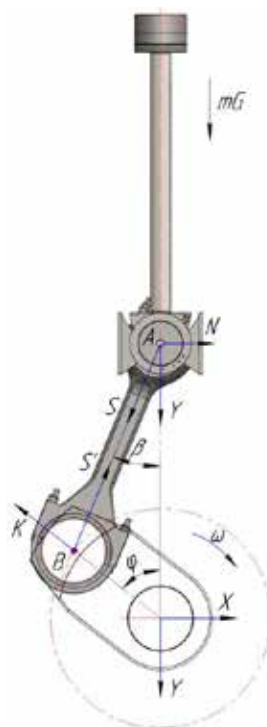


Рис. 2. Схема сил, що діють в КШМ МОД

Система з наведених вище трьох рівнянь з двома невідомими ($m_{ш.п.}$ і $m_{ш.к.}$) не має точного розв'язку. З (1) і (2) отримуємо:

$$m_1 = m_{ш.} \cdot \frac{L_k}{L}, \quad m_2 = m_{ш.} \cdot \frac{L_n}{L}. \quad (4)$$

Підставляючи отримані умови в (3):

$$m_{ш.} \cdot \frac{L_k}{L} \cdot L_n^2 + m_{ш.} \cdot \frac{L_k}{L} \cdot L_k^2 = m_{ш.} \cdot L_n \cdot L_k, \quad (5)$$

$$I_{мод} = m_{ш.} \cdot L_n \cdot L_k.$$

Отримана залежність не описує реальний момент інерції:

$$I'_{ш} = m_{ш.} \cdot L_n \cdot L_k \neq m_{ш.} \cdot \rho^2 = I_{ш.}^{н.м.} \quad (6)$$

де ρ – радіус інерції шатуна.

Розбіжність моментів інерції означає, що двомасова модель не може точно відтворити обертальну інерцію шатуна. Для типового шатуна чотиритактного дизеля $L_n \cdot L_k > \rho^2$ (зазвичай на 10...30 %). Це означає, що система заміщення мас великий момент інерції – вона «більш інерційна» при кутових прискореннях, ніж реальний шатун.

На практиці застосовують кілька методів для коригування двомасової моделі. Одним із них є метод пріоритету лінійної динаміки, в основу якого покладено ідею домінування в КШМ лінійних сил інерції, які визначають навантаження на

підшипники та основні напруження. Кутова інерція має другорядне значення. В розрахунках використовують співвідношення мас для МОД, яке в різних літературних джерелах має суттєві відмінності. Інший метод мінімізації похибки пропонує вибирати таке розташування точок заміщення, щоб мінімізувати сумарну похибку. З цією метою здійснюють пошук положення мас m_1 і m_2 у точках на відстанях l_1 і l_2 від ЦМ, що задовольняють умови (1-3):

В розрахунках приймають $l_1=L_{ш}$, $l_2=L_{к}$, але коректують співвідношення:

$$m_1 = m_{ш} \cdot \frac{L_{к}}{L} k, \quad m_2 = m_{ш} \cdot Lk, \quad (7)$$

де k – поправочний коефіцієнт (0,9...1,1).

Найбільш дієвим з точки зору зручності застосування та точності отриманих результатів є метод коригувального моменту, що нами використовується для оцінки точності розрахунків двомасової моделі. Він поєднує в собі геометричну зручність першого методу та фізичну точність другого. Даний метод усуває похибку в розрахунках моменту інерції шатуна, що є важливим при розрахунку бічних сил, шляхом умовного прикладання до шатуна величини коригувального моменту T_c , який відповідно врівноважується парою сил реакції в його підшипниках.

$$T_c = (I_{ш}^{ш.м.} - I_{мод}) \ddot{\beta}, \quad (8)$$

де $\ddot{\beta}$ – кутове прискорення шатуна.

Момент інерції шатуна та його вплив на кутове прискорення шатуна $\ddot{\beta}$ знаходять із геометричних співвідношень:

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin(\lambda \sin \alpha), \\ \dot{\beta} &= \omega \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}}, \\ \ddot{\beta} &= -\omega^2 \frac{\lambda \sin \alpha (1 - \lambda^2 \cos^2 \alpha)}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Момент сил інерції від обертання шатуна

$$T_{ин.ш} = -I_{ш}^{ш.м.} \cdot \ddot{\beta}. \quad (10)$$

Відповідно, максимальне значення моменту сил інерції шатуна становить при $\alpha = 90^\circ$: $T_{ин.ш} \approx I_{ш}^{ш.м.} \cdot \omega^2 \lambda$. Цей момент:

- не впливає на загальну динаміку КШМ;
- впливає на розподіл навантаження в шатунному підшипнику;
- є важливий для розрахунку шпильок шатуна [9, 10].

Сили інерції в моделі. Сила інерції мас, що рухаються поступально направлена протилежно напрямку їх прискорення

$$P_j = -m_{ш} \cdot a, \quad (11)$$

де $m_{ш}$ – маса деталей, що рухаються поступально;

a – прискорення деталей, що рухаються поступально.

В класичній моделі традиційно застосовують наближену формулу для розрахунку прискорення поршня [6; 7]:

$$a \approx R\omega^2 (\cos \varphi \pm \lambda \cos 2\varphi), \quad (12)$$

тож сила інерції може бути визначено за виразом:

$$P_j = -mR\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (13)$$

Дана формула розрахунку сил інерції припускає, що шатун є нескінченно довгим порівняно із кутом його відхилення, і відсікає всі гармоніки вище другої. В МОД значення λ є досить великим, що робить стандартне наближення a недостатньо точним. Так як рівняння переміщення поршня можна записати як:

$$y = R \left(\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right), \quad (14)$$

то швидкість поршня що є першою похідною переміщення за часом можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} v &= \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -R\omega \sin \varphi - \frac{L \cdot \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \omega = \\ &= -R\omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

де $d\varphi/dt = \omega$ та $R = L \cdot \lambda$.

При виведенні залежності прискорення використаємо правило диференціювання частки для взяття похідної від другого доданка швидкості. Після виконання математичних перетворень та групування членів отримуємо точний вираз:

$$a = -R\omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{\lambda \cos 2\varphi + \lambda^3 \sin^4 \varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1.5}} \right). \quad (16)$$

Для уточнення розрахунку прискорення шатуна в МОД застосуємо більш розгорнуту форму, яка представляє цей вираз у вигляді суми похідних для кращої обчислювальної стабільності при високих значеннях λ :

$$a = -R\omega^2 \left(\cos \varphi + \frac{\lambda \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\lambda^3 \sin^2 2\varphi}{4(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{1.5}} \right). \quad (17)$$

Це дає можливість покращити точність розрахунку прискорень в пікових точках від 3 до 5 % при значеннях $\lambda \approx 0,5$. Уточнена залежність враховує вплив вищих гармонік, які з'являються через відхилення шатуна на великі кути.

Крім сил інерції від поступально рухомих частин, в КШМ діють відцентрові сили інерції (рис. 2).

$$K = -m_j R\omega^2, \quad (18)$$

де m_j – маса обертових частин КШМ.

Енергетичний аспект моделі. Для оцінювання ефективності застосування двомасової моделі доцільно виконати її енергетичний аналіз. Кінетична енергія

реального шатуна може бути описана залежністю для тіла, що здійснює плоско-паралельний рух:

$$T_{\text{ш}} = \frac{1}{2} m_{\text{ш}} v_{\text{ц.м.}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{ш}}^{\text{ц.м.}} \omega_{\text{ш}}^2, \quad (19)$$

де $v_{\text{ц.м.}}$ – швидкість центру мас шатуна;

$\omega_{\text{ш}} = \dot{\beta}$ – кутова швидкість шатуна.

Кінетична енергія двомасової моделі визначається як сума кінетичної енергії виділених мас:

$$T_{\text{ш}} = \frac{1}{2} m_{\text{ш.п.}} v_{\text{п}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{ш.к.}} v_{\text{к}}^2, \quad (20)$$

де $v_{\text{п}}$ – швидкість частини шатуна, приведена до поршневої головки (поступальна);

$v_{\text{к}}$ – швидкість частини шатуна, приведеної до кривошипної головки (обертальна)

При правильному виборі виділених мас шатуна кінетична енергія моделі становить

$$E_{\text{к.мод}} \approx \frac{1}{2} m_{\text{ш}} v_{\text{ц.м.}}^2. \quad (21)$$

В класичній моделі відсутній член $\frac{1}{2} I_{\text{ш}}^{\text{ц.м.}} \omega_{\text{ш}}^2$, що може становити від 5 до 15 % від загальної енергії.

Виконаємо аналіз точності застосування класичного методу розрахунку, що базується на двомасовій моделі в порівняно із тримасовою моделлю. Наявність значної кількості пакетів 3D проектування надає можливість за короткий термін встановити масові характеристики шатунів ДВЗ, зокрема положення центру мас та момент інерції відносно центру мас в площині обертання. З метою наочності виконаного дослідження візьмемо за основу характеристики КШМ малообертового дизеля виробництва фірми MAN B&W 6S46ME-B8.5, що має наступні основні характеристики [11]:

- номінальна ефективна потужність (режиму SMCR) $N_e = 6330$ кВт;
- номінальна частота обертання колінчастого валу $n_{\text{ном}} = 110$ с⁻¹;
- діаметр циліндра $D = 0,46$ м;
- хід поршня $S = 1,932$ мм.

Розробка твердотільних моделей рухомих деталей кривошипно-шатунного механізму двигуна 6S46ME-B8.5 здійснювалось за допомогою програмного комплексу SolidWorks [12]. Загальна вага рухомих деталей КШМ (без врахування ваги кривошипу та телескопічної труби) становить 2775 кг. Момент інерції шатуна відносно центру мас в площині його обертання становить $I_{zz} = 733139667,18$ кг·мм², та відстань від осі кривошипної головки до центру мас шатуна становить $L_k = 1137,62$ мм.

Тримасова модель розрахунку сил інерції. Головною ідеєю тримасової моделі є заміна шатуна трьома точковими масами, що розташовано так, щоб точно відтворити всі умови динамічної еквівалентності. Маси в таких моделях розташовуються в центрах поршневої головки m_1 , кривошипної m_2 та у центрі мас шатуна m_3 .

В розрахунках застосовують умови еквівалентності:

– збереження маси

$$m_1 + m_2 + m_3 = m_{\text{ш}}; \quad (22)$$

– збереження положення центру мас (відносно точки А)

$$m_2 \cdot L + m_3 \cdot L_{\text{п}} = m_{\text{ш}} \cdot L_{\text{п}}; \quad (23)$$

– збереження моменту інерції (відносно точки А)

$$m_2 \cdot L^2 + m_3 \cdot L_{\text{п}}^2 = I_A, \quad (24)$$

де I_A – момент інерції шатуна відносно точки А, що пов'язаний з моментом інерції відносно ЦМ за теоремою Гюйгенса: $I_A = I_{\text{ц.м.}} + m_{\text{ш}} \cdot L_{\text{п}}^2$

Відповідно, маси m_2 та m_3 можна виразити як

$$m_2 = \frac{I_A - m_{\text{ш}} L_{\text{п}}^2}{L^2 - L \cdot L_{\text{п}}}, \quad (25)$$

$$m_3 = m_{\text{ш}} - m_2 \frac{L}{L_{\text{п}}}. \quad (26)$$

При виконанні розрахунків із використанням тримасової моделі приймають рух кожної маси

– m_1 (т. А) рухається зворотно-поступально з прискоренням поршня;

– m_2 (т. В) рухається обертово з доцентровим прискоренням;

– m_3 (т. С – ЦМ) рухається складно – суперпозиція поступального та обертового рухів.

Розрахунок сил інерції та реакцій у підшипниках шатуна. Повна сила інерції шатуна

$$F_{\text{ін}}^{\text{ш}} = F_{\text{ін}}^1 + F_{\text{ін}}^2 + F_{\text{ін}}^3. \quad (27)$$

Після проведених підстановок та спрощень, отримуємо:

$$F_{\text{інер}}^{\text{ш}} = -m_{\text{ш}} \cdot a_C, \quad (28)$$

що відповідає реальній силі інерції шатуна. Прискорення центру мас шатуна знаходиться через кінематику:

$$a_C = \frac{L_K}{L} a_A + \frac{L_{\text{п}}}{L} a_B + \alpha + r_C + \omega \cdot (\omega + r_C), \quad (29)$$

Момент інерції моделі точно дорівнює реальному:

$$I_{\text{мод}} = r_2 \cdot F_{\text{інер}}^2 + r_3 \cdot F_{\text{інер}}^3. \quad (30)$$

Запишемо рівняння рівноваги шатуна:

– сума моментів відносно т. А

$$M_{\text{ін}}(\varphi) + F_{\text{yB}}(\varphi)L - W_{\text{ш}}L_{\text{п}} = 0; \quad (31)$$

– сума проекцій на вісь Y

$$F_{\text{yA}}(\varphi) + F_{\text{yB}}(\varphi) + F_{\text{yін.ш.}}(\varphi) - W_{\text{ш}} = 0; \quad (32)$$

– сума проекцій на вісь X

$$F_{\text{xA}}(\varphi) + F_{\text{xB}}(\varphi) + F_{\text{xін.ш.}}(\varphi) = 0. \quad (33)$$

В результаті розв'язку системи рівнянь отримуємо залежності для визначення складових сил реакції в підшипникових вузлах шатуна:

$$\begin{aligned}F_{yB}(\varphi) &= \frac{W_{ш} L_p - M_{ин}(\varphi)}{L}; \\F_{yA}(\varphi) &= W_{ш} - F_{y_{ин.ш.}}(\varphi) - F_{yB}(\varphi); \\F_{xA}(\varphi) &= -F_{ин,A}(\varphi); \\F_{xB}(\varphi) &= -F_{xA}(\varphi) - F_{x_{ин.ш.}}(\varphi).\end{aligned}\tag{34}$$

Тоді сумарні реакції визначають за формулами:

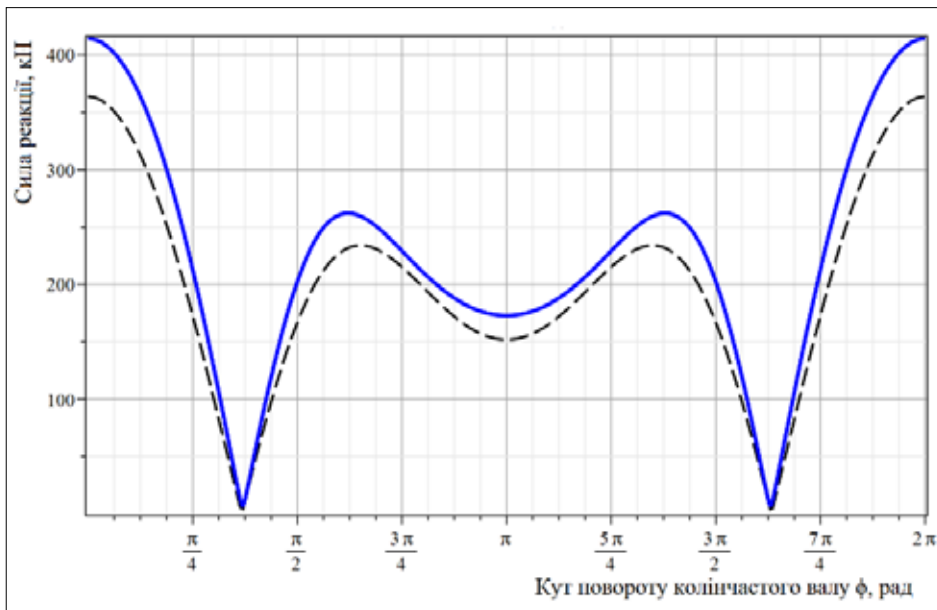
$$\begin{aligned}F_A(\varphi) &= \sqrt{F_{xA}^2(\varphi) + F_{yA}^2(\varphi)}; \\F_B(\varphi) &= \sqrt{F_{xB}^2(\varphi) + F_{yB}^2(\varphi)}.\end{aligned}\tag{35}$$

Користуючись наведеними міркуваннями, виконано розрахунок динамічних показників та визначено розподіл сумарних сил реакції в шатунному та крейцкопфному підшипниках на частоті обертання колінчастого валу 110 хв^{-1} при використанні різних моделей динамічного розрахунку КШМ. На рис. 3а і 3б наведено результати розрахунку сил реакції в досліджуваних підшипниках із застосуванням класичної двомасової моделі та вдосконаленої, із використанням коригуючого моменту та уточненого методу розрахунку сили інерції деталей, що рухаються поступально.

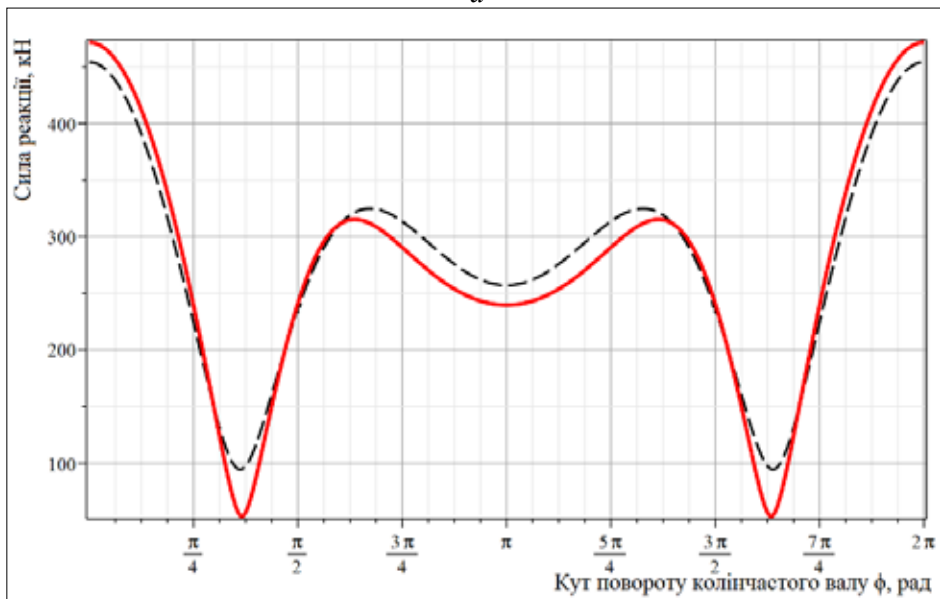
Класична модель демонструє завищений момент інерції (для досліджуваного шатуна похибка становить близько 10...30 %). Модель поводить ся так, ніби шатун «важче» розгойдати, ніж насправді. Це призводить до систематичної похибки у визначенні бічної сили N та реакцій у підшипниках. Графіки показують плавні криві, але вони зміщені відносно реальних значень, особливо в зонах ВМТ та максимального відхилення шатуна (близько 70...110 градусів повороту кривошипа).

Вдосконалення двомасової моделі є спробою виправити недолік базової моделі шляхом додавання «математичних милиць» – фіктивного зовнішнього моменту. При її застосуванні отримані сили інерції та реакції в підшипниках, що ідеально збігаються зі значеннями тримасової моделі (похибка < 1...2 %, що на рівні похибки округлення). Основним її недоліком є схильність генерувати «сплески» або різкі стрибки значень (рис. 5), оскільки коригувальний момент залежить від кутового прискорення, яке змінюється дуже різко.

При застосуванні тримасової моделі отримані графіки сил інерції та реакції в підшипниках гладкі, без розривів та сплесків. Модель точно описує динаміку як у ВМТ/НМТ, так і в моменти максимального бічного відхилення. На нашу думку застосування даного методу є єдиним варіантом, що придатний для цифрових двійників, оскільки він забезпечує точність рівня CAE (Computer-Aided Engineering) при швидкодії простих формул.

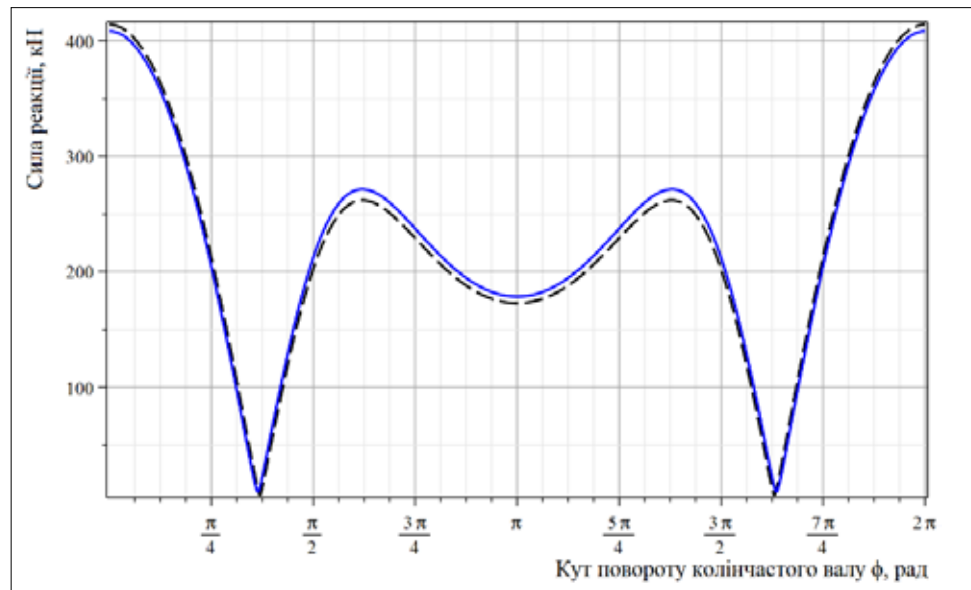


a

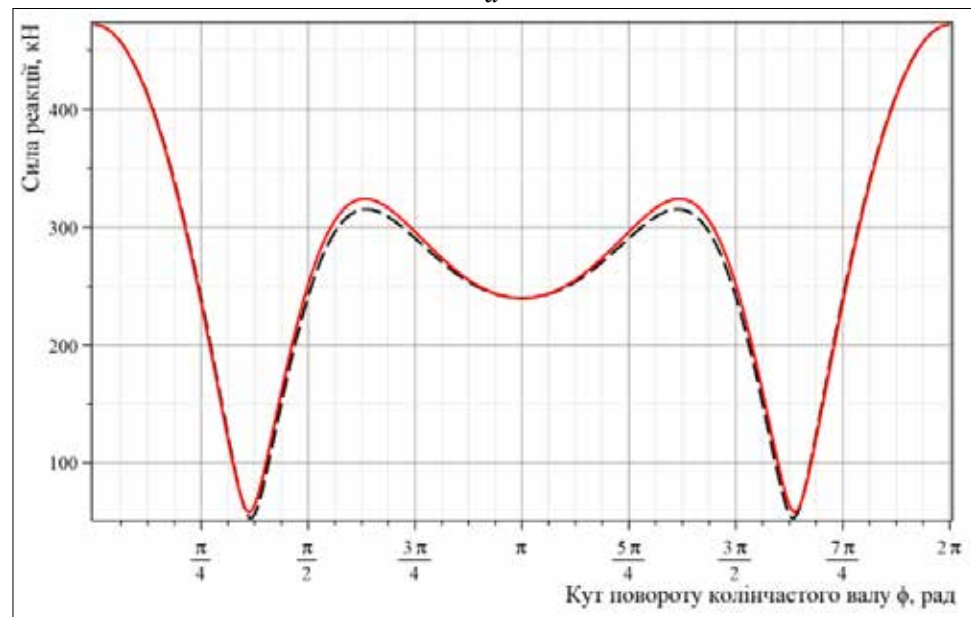


б

Рис. 3. Порівняння результатів розрахунку сили реакції на сили інерції в кривокопфному (а) та шатунному підшипнику (б) при застосуванні двомасових моделей в класичному варіанті та вдосконаленому (суцільна лінія – двомасова вдосконала модель, пунктирна – класична двомасова модель)



а



б

Рис. 4. Порівняння результатів розрахунку сили реакції на сили інерції в кривокопфному (а) та шатунному підшипнику (б) при застосуванні вдосконаленої двомасової моделі та тримасової (суцільна лінія – двомасова вдосконалена модель, пунктирна – класична двомасова модель)

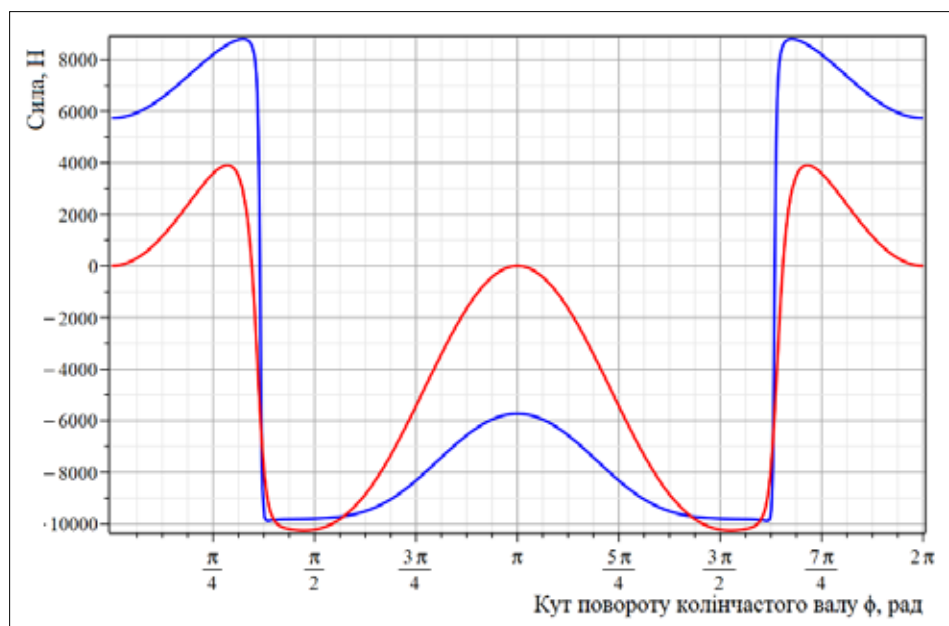


Рис. 5. Абсолютна різниця розрахунку сил реакції в крейцкопфному та шатунному підшипниках при застосуванні вдосконаленої двомасової моделі та тримасової

Висновки. Узагальнюючи результати теоретичного та чисельного аналізу, можна сформулювати розширені висновки щодо застосовності моделей динаміки КШМ:

1. Класична двомасова модель, попри свою історичну значущість, демонструє систематичну похибку у визначенні моментів інерції (до 30 %) через неможливість задовольнити три умови динамічної еквівалентності одночасно. Це робить її непридатною для прецизійних задач сучасної діагностики, де критичним є точне визначення бічних сил та навантажень на крейцкопф.

2. Тримасова модель забезпечує повну динамічну відповідність реальному об'єкту без використання штучних коригувальних коефіцієнтів. Вона усуває «фантомні» моменти, притаманні двомасовим схемам, і дозволяє розраховувати інерційні навантаження з точністю, що наближається до FEA-методів (відхилення менше 5 %), але при цьому залишається обчислювально ефективною для роботи в реальному часі.

3. Динамічний розрахунок КШМ МОД із використанням вдосконаленої двомасової моделі забезпечує необхідну точність визначення сил інерції, але можливість появи нефізичних стрибків робить цю модель ризикованою для систем діагностики в реальному часі, оскільки система може сприйняти математичний сплеск як ударне навантаження.

4. У контексті Індустрії 4.0, тримасова модель є «золотою серединою» для ядра цифрового двійника. Вона значно швидша за методи скінченних елементів (FEA), що дозволяє використовувати її для online-моніторингу, водночас забезпечуючи фізичну достовірність, недосяжну для суто статистичних моделей (black-box). Це відкриває шлях до створення гібридних PIML-систем (Physics-Informed Machine Learning), де фізична модель навчає або коригує нейромережу.

ЛІТЕРАТУРА

1. DNV GL, Condition-Based Maintenance (CBM). Class Guideline DNVGL-CG-0224, Hamburg: DNV GL AS, 2018.
2. Liu Z., Meyendorf N., Mrad N. “The role of data fusion in predictive maintenance using digital twin”, in AIP Conference Proceedings, 2018, vol. 1949, p. 020023. doi: 10.1063/1.5034421
3. Grieves M. Digital Twin: Manufacturing Excellence through. *Virtual Factory Replication. White paper*. 2014. Vol. 1. P. 1–7.
4. Belousov I., Bulgakov M., Savchuk V. Modern Marine Internal Combustion Engines (Springer Series on Naval Architecture, Marine Engineering, Shipbuilding and Shipping, vol. 8). Germany : Springer, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-49749-1
5. Радцир А. А. Теорія та розрахунок теплових двигунів. М. : ОНТИ, 1933.
6. Norton R. L. Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, 5th ed. New York : McGraw-Hill Education, 2011.
7. Марченко А. П. та ін. Двигуни внутрішнього згоряння: Т. 1: Розробка конструкцій форсованих двигунів наземного транспорту / за ред. А. П. Марченка, М. К. Рязанцева, А. Ф. Шеховцова. Харків : Прапор, 2004.
8. Bathe K. J. Finite Element Procedures, 2nd ed. Watertown : Klaus-Jurgen Bathe, 2014.
9. Bureau Veritas, Rules for the Classification of Steel Ships. Part C: Machinery, Electricity, Automation and Fire Protection. Ch. 1: Machinery. Sec. 2: Internal Combustion Engines, Paris: Bureau Veritas, 2021.
10. IACS, “UR M53. Calculation of Crankshafts for Internal Combustion Engines”, London: International Association of Classification Societies, 2011.
11. MAN Diesel & Turbo, S46ME-B8.5. Project Guide: Electronically Controlled Two-stroke Engines, Copenhagen, 2014. [Online]. Available: <https://marine.man-es.com>. [Accessed: Jan. 19, 2026].
12. Dassault Systèmes, “SolidWorks Documentation”, 2023. [Online]. Available: <https://help.solidworks.com>. [Accessed: Jan. 19, 2026].

REFERENCES

1. DNV GL. (2018). *Condition-Based Maintenance (CBM). Class Guideline DNVGL-CG-0224*. DNV GL AS.
2. Liu, Z., Meyendorf, N., & Mrad, N. (2018). The role of data fusion in predictive maintenance using digital twin. *AIP Conference Proceedings*, 1949 (1), 020023. <https://doi.org/10.1063/1.5034421>
3. Grieves, M. (2014). *Digital Twin: Manufacturing Excellence through Virtual Factory Replication* (White paper, Vol. 1, pp. 1–7). Florida Institute of Technology.
4. Belousov, I., Bulgakov, M., & Savchuk, V. (2020). *Modern Marine Internal Combustion Engines* (Springer Series on Naval Architecture,

- Marine Engineering, Shipbuilding and Shipping, Vol. 8). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49749-1>
5. Radtsig, A. A. (1933). *Teoriya ta rozrakhunok teplovykh dvyhuniv* [Theory and calculation of heat engines]. ONTI.
 6. Norton, R. L. (2011). *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
 7. Marchenko, A. P., Riazantsev, M. K., & Shekhovtsov, A. F. (Eds.). (2004). *Dvyhuny vnutrishnyoho zghoryannya: Vol. 1. Rozrobka konstruktсий forsovanykh dvyhuniv nazemnoho transportu* [Internal combustion engines: Vol. 1. Development of designs for boosted engines of land transport]. Prapor.
 8. Bathe, K. J. (2014). *Finite Element Procedures* (2nd ed.). Klaus-Jurgen Bathe.
 9. Bureau Veritas. (2021). *Rules for the Classification of Steel Ships. Part C: Machinery, Electricity, Automation and Fire Protection. Chapter 1: Machinery. Section 2: Internal Combustion Engines*. Bureau Veritas.
 10. IACS. (2011). *UR M53. Calculation of Crankshafts for Internal Combustion Engines*. International Association of Classification Societies.
 11. MAN Diesel & Turbo. (2014). *S46ME-B8.5. Project Guide: Electronically Controlled Two-stroke Engines*. <https://marine.man-es.com>
 12. Dassault Systèmes. (2023). *SolidWorks Documentation*. <https://help.solidworks.com>

Дата першого надходження статті до видання: 21.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 25.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 30.04.2026