УДК 658.7 DOI: 10.33082/td.2019.1-4.05

О ВЕРОЯТНОСТНОМ АНАЛОГЕ МОДЕЛИ УИЛСОНА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕРА ПОСТАВОК ПАРТИИ ТОВАРА

М.Я. Постан

д.э.н., зав. кафедрой «Менеджмент и маркетинг»,
Одесский национальный морской университет, Одесса, Украина,
ORCID ID: 0000-0003-4891-3063, postan@ukr.net

Аннотация

Введение. *Классическая модель Уилсона в теории управления запасами и ее различные обобщения до сих пор продолжает играть важную роль в теории и практике логистического менеджмента. В частности, представляет большой теоретический и практический интерес ее развитие в следующих направлениях: учет возможных рисков, связанных с вариацией сроков поставок заказанных партий товара снабженческой фирме, а также случайным колебанием спроса на товар; совместное планирование снабженческой фирмой закупки товара и его доставки потребителям транспортными средствами; исследование влияние политики закупок товаров фирмой на организацию производственного процесса на предприятиях-потребителей. Настоящая работа посвящена анализу возможных подходов к решению задачи, относящейся к первому из вышеуказанных направлений и основанной на применении методов теории массового обслуживания.* ***Цель.*** *Построение и анализ обобщенной модели Уилсона на случай, когда длительность промежутка времени с момента размещения заказа на поставку товара до осуществления самой поставки является случайной величиной с произвольной функцией распределения.* ***Результаты.*** *В работе предложена вероятностная модель для определения оптимального размера партии товара, который снабженческая фирма заказывает у поставщика, с учетом случайной длительности промежутка времени от момента оформления заказа до получения товара фирмой. Модель обобщает классическую модель Уилсона для определения оптимального размера партии товара, который закупает снабженческая фирма. Система управления запасами анализируется в установившемся режиме работы. Целевой функцией являются суммарные средние затраты фирмы в единицу времени на приобретение и хранение товара, также рыночные потери вследствие временного отсутствия товара на складе.* ***Выводы.*** *В работе показано, что для учета случайности времени выполнения заказа на поставку партии товара можно использовать сочетание аппарата теории запасов и теории очередей. При этом формула Уилсона для одного вида товара имеет столь же простой вид, как и для случая нулевого времени выполнения заказа. Примененный выше подход может быть использован и для анализа более общей ситуации, когда спрос на товар также является случайной величиной, что более соответствует логистической практике.*

Ключевые слова: *снабженческая фирма, политика закупки товара, случайное время доставки, обобщенная модель Уилсона, оптимальный размер поставки.*

УДК 658.7

ПРО ІМОВІРНІСНИЙ АНАЛОГ МОДЕЛІ ВІЛЬСОНА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІРУ ПОСТАВОК ПАРТІЇ ТОВАРУ

М.Я. Постан

д.е.н., зав. кафедрою «Менеджмент і маркетинг»,
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна,
ORCID ID: 0000-0003-4891-3063, postan@ukr.net

Анотація

Вступ. *Класична модель Вільсона в теорії управління запасами і її різні узагальнення досі продовжує відігравати важливу роль в теорії та практиці логістичного менеджменту. Зокрема, представляє великий теоретичний і практичний інтерес її розвиток в наступних напрямках: облік можливих ризиків, пов'язаних з варіацією термінів постачань замовлених партій товару постачальній фірмі, а також випадковим коливанням попиту на товар; спільне планування постачальною фірмою закупівлі товару і його доставки споживачам транспортними засобами; дослідження вплив політики закупівель товарів фірмою на організацію виробничого процесу на підприємствах-споживачів. Дана робота присвячена аналізу можливих підходів до вирішення завдання, що відноситься до першого з вищевказаних напрямків і заснована на застосуванні методів теорії масового обслуговування.* ***Мета.*** *Побудова і аналіз узагальненої моделі Вільсона на випадок, коли тривалість проміжку часу з моменту розміщення замовлення на поставку товару до здійснення самої поставки є випадковою величиною з довільною функцією розподілу.* ***Результати.*** *В роботі запропонована імовірнісна модель для визначення оптимального розміру партії товару, який постачальна фірма замовляє у постачальника, з урахуванням випадкової тривалості проміжку часу від моменту оформлення замовлення до отримання товару фірмою. Модель узагальнює класичну модель Вільсона для визначення оптимального розміру партії товару, який закуповує постачальна фірма. Система управління запасами аналізується в сталому режимі роботи. Цільовою функцією є сумарні середні витрати фірми в одиницю часу на придбання та зберігання товару, також ринкові втрати внаслідок тимчасової відсутності товару на складі.* ***Висновки.*** *У роботі доведено, що для обліку випадковості часу виконання замовлення на поставку партії товару можна використовувати поєднання апарату теорії запасів і теорії черг. При цьому формула Вільсона для одного виду товару має настільки ж простий вигляд, як і для випадку нульового часу виконання замовлення. Застосований вище підхід може бути використаний і для аналізу більш загальної ситуації, коли попит на товар також є випадковою величиною, що більш відповідає логістичної практиці.*

Ключові слова: *постачальна фірма, політика закупівлі товару, випадковий час доставки, узагальнена модель Вільсона, оптимальний розмір поставки.*

UDC 658.7

ABOUT PROBABILISTIC ANALOGUE OF WILSON'S MODEL FOR DETERMINING THE OPTIMAL SIZE OF DELIVERY OF A GOODS PARTY

M.Ya. Postan

DSc, Head of the Department „Management and Marketing",
Odessa National Maritime University, Odessa, Ukraine,
ORCID ID: 0000-0003-4891-3063, postan@ukr.net

Abstract

Introduction. *Wilson's classical model in the theory of inventory management and its various generalizations still continues to play an important role in the theory and practice of logistics management. In particular, its development in the following areas is of great theoretical and practical interest: taking into account possible risks associated with a variation in the timing of deliveries of ordered consignments of goods to a supply company, as well as a random fluctuation in demand for goods; joint planning by a supply company for the purchase of goods and their delivery to consumers by vehicles; study the impact of the firm's procurement policy on the organization of the production process at consumer enterprises. This paper is devoted to the analysis of possible approaches to solving the problem related to the first of the above directions and based on the application of queuing theory methods.* ***Goal.*** *The construction and analysis of a generalized Wilson model for the case when the length of time from the moment of placing the order for the delivery of goods to the delivery itself is a random variable with an arbitrary distribution function.* ***Results.*** *The stochastic model is proposed for lot size of good optimization which supply firm orders at a vendor taking into account a random time of good delivery. The model generalizes the classic Wilson formula for determination of optimal lot size. The model is built with the help of storage and queueing theories methods. The inventory control system is analyzed in steady-state regime of functioning. The objective function is total mean current costs of supply firm for order of good, its storage, and for market losses because of temporal absence of good in warehouse. For the case one kind of good the generalized Wilson formula is obtained. For the case of several kinds of good the corresponding optimization problem for optimal lot sizes determination has been formulated.* ***Conclusions.*** *The paper shows that to take into account the randomness of the lead time for the delivery of a consignment, you can use a combination of the stock theory apparatus and queue theory. Moreover, the Wilson formula for one type of product has the same simple form as for the case of zero lead time. The approach used above can be used to analyze a more general situation, when the demand for goods is also a random variable, which is more consistent with logistic practice.*

Key words: *supply firm, policy of a good buying, random delivery time, generalized Wilson formulae, optimal lot size.*

Введение

Классическая модель Уилсона в теории управления запасами и ее различные обобщения до сих пор продолжает играть важную роль в теории и практике логистического менеджмента [1–3]. В частности, представляет большой теоретический и практический интерес ее развитие в следующих направлениях:

а) учет возможных рисков, связанных с вариацией сроков поставок заказанных партий товара снабженческой фирме, а также случайным колебанием спроса на товар;

б) совместное планирование снабженческой фирмой закупки товара и его доставки потребителям транспортными средствами;

в) исследование влияние политики закупок товаров фирмой на организацию производственного процесса на предприятиях-потребителей.

Настоящая работа посвящена анализу возможных подходов к решению задачи, относящейся к первому из вышеуказанных направлений и основанной на применении методов теории массового обслуживания (ТМО).

Обзор последних исследований и публикаций. Согласно работе [4], все типы моделей управления запасами можно условно разделить на две основных группы:

а) модели группы А, в которых процесс пополнения запаса продукта задан, а мы можем управлять только интенсивностью его использования (так называемые модели теории хранения запасов − Stochastic Storage Theory). Типичный пример − модели теории водохранилищ;

б) модели группы Б, в которых процесс пополнения запаса товара считается управляемым, а процесс потребления товара задан (модели теории оптимального управления запасами – Inventory Control Theory).

В практических приложениях, однако, часто используется сочетание моделей из обеих указных групп.

В работе [5] была показана возможность применения стохастической теории запасов к решению задачи определения оптимального размера партии поставляемого товара в условиях, когда заказы на пополнение уровня запаса товара на складе фирмы подаются вне зависимости от текущего уровня запаса. Такая модель носит скорее теоретический характер и демонстрирует только возможность использования в теории управления запасами весьма гибкого и универсального математического аппарата, обычно применяемого при исследовании сложных вероятностных систем любой природы. Здесь имеются в виду аппарат цепей Маркова (с непрерывным временем), полумарковских процессов, кусочно-линейных марковских и др. случайных процессов [6–8]. В более широком смысле здесь речь идет об изучении стохастических систем хранения запасов, в которых интенсивность потока поступающих в систему новых партий товара зависит от уровня запаса на складе фирмы.

Ниже на простом примере будет показано, как указанные процессы могут быть использованы для вероятностного обобщения модели Уилсона на случай, когда точкой заказа на поставку очередной партии товара служит момент времени обнуления уровня запаса (как и в модели Уилсона), а время выполнения заказа является случайной величиной с произвольным законом распределения.

Цель исследования и постановка задачи. Целью исследования является построение и анализ обобщенной модели Уилсона на случай, когда длительность промежутка времени с момента размещения заказа на поставку товара до осуществления самой поставки является случайной величиной с произвольной функцией распределения.

Изложение основного материала

Пусть снабженческая фирма периодически закупает товар одного вида, причем размер закупаемой партии равен Q. Потребление товара (т.е. его реализация, вывоз) происходит с постоянной интенсивностью W (т.е. W – интенсивность спроса). В момент времени, когда запас товар на складе становится равным нулю, подается заказ на поставку новой партии товара. Время с момента подачи n-й по счету заявки до прибытия партии товара есть случайная величина θ_n с функцией распределения (ф.р.) $A(t)$ (случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ предполагаются взаимно независимыми). В описанной модели предусматриваются рыночные потери фирмы вследствие задержки в поставке товара после исчерпания его запаса (задолженный спрос отсутствует). В данной модели имеет место риск возникновения потерь фирмы из-за неудовлетворенного спроса.

Отметим, что длительность n-го цикла заказа, т.е. промежутка времени с момента подачи n-й заявки на пополнение запаса до поступления на склад партии товара, равна $\tau + \theta_n$, где $\tau = Q/W$.

Пусть $Z(t)$ означает уровень запаса товара на складе в момент времени t. Очевидно, что

$$Z(t) = Q - Wt, \qquad 0 \le t \le \tau.$$

В терминах теории массового обслуживания (ТМО) вероятностное поведение склада совпадает с вероятностным поведением простейшей одноканальной системы массового обслуживания типа $GI/D/1$ с отказами, без ожидания и постоянным временем обслуживания любой заявки, равным τ. Обозначим через $\gamma(t)$ случайный процесс, принимающий два значения:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если в момент } t \text{ склад пуст и партия товара находится в пути,} \\ 1, & \text{если склад в момент } t \text{ не пуст..} \end{cases}$$

Иными словами, $\gamma(t) = e(Z(t))$, где $e(x) > 1$, если $x > 0$, $e(0)=0$.

Будем рассматривать предельное при $t \to \infty$ поведение процесса $Z(t)$ (т.е. в установившемся, статистически равновесном режиме работы склада). Из ТМО известно [8], что

$$\pi_0 = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\gamma(t) = 0\} = (1 + \frac{\lambda Q}{W})^{-1},$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}(Z(t) | \gamma(t)=1) = \frac{Q}{2}, \tag{1}$$

где $\lambda^{-1} = \int_0^{\infty} t dA(t) < \infty -$ среднее значение случайной величины θ_1, т.е. средняя длительность доставки партии товара.

При этом интенсивность потока партий товара на склад равна $\lambda Q \pi_0$, а интенсивность потока заказов на пополнение запаса равна $\lambda \pi_0$. Интенсивность же потока финансовых потерь из-за неудовлетворенного спроса составит $Wd\pi_0$.

С помощью приведенных результатов (1) мы можем оценить совокупные средние текущие затраты фирмы на размещение заказов, закупку товара, хранение запасов, а также рыночные потери, которые обозначим $\bar{C}(Q)$. С этой целью введем дополнительные условные обозначения:

d − продажная цена товара, устанавливаемая снабженческой фирмой;

c − затраты на закупку единицы товара;

c_0 − затраты на размещение заказа;

c_1 − расходы на хранение единицы товара на складе в единицу времени.

В принятых условных обозначениях величину $\bar{C}(Q)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{C}(Q) &= Wd\pi_0 + \lambda Qc\pi_0 + \lambda c_0\pi_0 + c_1(1-\pi_0)Q/2 = \\ &= [Wd + \lambda Qc + \lambda c_0 - c_1 Q/2]/(1+\lambda Q/W) + c_1 Q/2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $p = d - c$.

Значение Q, минимизирующее функцию (2), удовлетворяет уравнению $\bar{C}'(Q) = 0$, откуда получаем следующее квадратное уравнение

$$\frac{\lambda c_1}{2W^2}Q^2 + \frac{c_1}{W}Q - p - \frac{\lambda c_0}{W} = 0,$$

где $p = d - c$. Положительный корень этого уравнения равен

$$Q^{(o)} = \frac{W}{\lambda}\left[\sqrt{1 + 2\lambda\frac{\lambda c_0 + Wp}{Wc_1}} - 1\right]. \tag{3}$$

Как видно из (3), в отличие от формулы Уилсона, оптимальный размер партии товара зависит от параметра p − разности продажной цены и стоимости единицы товара. В частности, при $\lambda \to \infty$ (т.е. при мгновенном выполнении заказа на поставку) из (3) вытекает формула Уилсона, т.е.

$$Q^{(o)} = \sqrt{\frac{2c_0W}{c_1}}.$$

Полученные результаты могут быть обобщены на случай нескольких видов товара, подобно тому как это делается в модели Уилсона. Пусть, например, имеется M видов товара, которые фирма заказывает у M поставщиков, причем у каждого поставщика заказывается только один вид товара. Будем считать также, что заказы на поставку каждого вида товара осуществляются независимо друг от друга. В отношении товара каждого вида сохраним принятые ранее соглашения и условные обозначения, снабдив последние только нижним индексом m, означающим номер вида товара, $m = 1, 2, \ldots, M$. Введем также дополнительные обозначения:

v_m – удельный погрузочный объем товара m-го вида;
V – вместимость склада.

Тогда оптимизационную модель можно сформулировать следующим образом: найти такие значения положительных параметров $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$, которые бы доставляли минимум функции (см. (2))

$$\bar{C}(Q_1, \ldots, Q_M) = \\ = \sum_{m=1}^{M} [W_m d_m + \lambda_m (c_{0m} + c_m Q_m) - c_{1m} Q_m / 2] / (1 + \lambda_m Q_m / W_m) + c_{1m} Q_m / 2] \tag{5}$$

при условии

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} (1 - \pi_{0m}) Q_m v_m \le V$$

или

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_m Q_m^2}{W_m + \lambda_m Q_m} v_m \le 2V. \tag{6}$$

Заметим, что и целевая функция (5), и ограничение (6) представляют собой выпуклые функции переменных $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$. При выполнении условия

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_m (Q_m^{(o)})^2}{W_m + \lambda_m Q_m^{(o)}} \le 2V,$$

где величины $Q_m^{(o)}$ вычисляются по формуле (3) с соответствующей модификацией, решение задачи минимизации функции (5) при условии (6) дается формулами (3). В противном случае необходимо решать задачу на условный экстремум. Для этого может быть использован, например, метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим лагранжиан этой задачи:

$$L = \bar{C}(Q_1, \ldots, Q_M) + \phi[\sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_m Q_m^2}{W_m + \lambda_m Q_m} v_m - 2V], \tag{7}$$

где ϕ – неопределенный множитель. Приравнивая частные производные функции (7) по переменным $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$ и ϕ к нулю и выполнив несложные преобразования, получим следующее выражение для оптимального значения Q_m:

$$Q_m^* = \frac{W_m}{\lambda_m} [\sqrt{1 + \frac{2\lambda_m (p_m + \lambda_m c_{0m} / W_m)}{c_{1m} + 2\lambda_m \nu_m \phi}} - 1], \tag{8}$$

где множитель ϕ является единственным положительным корнем уравнения

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_m (Q_m^*)^2}{w_m + \lambda_m Q_m^*} v_m = 2V .$$

С вычислительной точки зрения решение задачи минимизации функции (5) при условии (6) удобней выполнять с помощью пакета программ *Microsoft Excel*, опция «Поиск решения».

Выводы

Таким образом, для учета случайности времени выполнения заказа на поставку партии товара можно использовать сочетание аппарата теории запасов и теории очередей. При этом формула Уилсона для одного вида товара имеет столь же простой вид, как и для случая нулевого времени выполнения заказа. Примененный выше подход может быть использован и для анализа более общей ситуации, когда спрос на товар также является случайной величиной, что более соответствует логистической практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management / J. Bramel, D. Simchi-Levi. Berlin: Springer, 1997. 281 p.
2. Introduction to distribution logistics / P. Brandimarte, G. Zotteri. New York: John Wiley & Sons, 2007. 581 p.
3. Логистика. Интегрированная цепь поставок / Д. Бауэрсокс. М.: Олимп-Бизнес, 2005. 640 с.
4. Булинская Е. В. Теория запасов. *Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания в Пущино*. 1976. Т. 1. С. 62–85.
5. Постан М.Я. О влиянии теории управления запасами на развитие логистики. *Логистика: проблемы и решения.* 2007. № 2. С. 24–27.
6. Postan M.Ya. Application of Markov Drift Processes to Logistical Systems Modeling. *Proc. of First Intl. Conf. "Dynamics in Logistics"*, Bremen, 2007. pp. 443–455. doi: 10.1007/978-3-540-76862-3.
7. Postan M.Ya. Application of Semi-Markov Drift Processes to Logistic Systems Modeling and Optimization. *Proc. of 4th Intl. Conf. "Dynamics in Logistics" LDIC2014*. Berlin, 2016. pp. 227–237. doi: 10.1007/978-3-319-23512-7.
8. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. М.: КомКнига, 2005. 397 с.

REFERENCES

1. J. Bramel, J., & Simchi-Levi, D. (1997). *The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management*. Berlin: Springer, 1997. 281 p.

2. Brandimarte, P., & Zotteri, G. (2007). *Introduction to distribution logistics.* New York: John Wiley & Sons. 581 p.
3. Bowersox, D. & Closs, D. (2005). *Logistical Management. The Integrated Supply Chain Process* [Logistika. Integrirovannaia tcep postavok]. M.: Olymp-Business. 640 p. [in Russian].
4. Bulinskaya, E.V. (1976). Stock Theory [Teoriia zapasov]. *Proceedings of the III Union School-Meeting on Queuing Theory in Pushchino. 1.* 62–85 [in Russian].
5. Postan, M.Ya. (2007). On the impact of inventory management theory on the development of logistics [O vliianii teorii upravleniia zapasami na razvitie logistiki]. *Logistics: problems and solutions. 2.* 24–27 [in Russian].
6. Postan, M.Ya. (2007). Application of Markov Drift Processes to Logistical Systems Modeling. *Proc. of First Intl. Conf. "Dynamics in Logistics", Bremen,* 443–455. doi: 10.1007/978-3-540-76862-3
7. Postan, M.Ya. (2016). Application of Semi-Markov Drift Processes to Logistic Systems Modeling and Optimization. *Proc. of 4th Intl. Conf. "Dynamics in Logistics" LDIC2014. Berlin, 227-237.* doi: 10.1007/978-3-319-23512-7
8. Gnedenko, B.V., & Kovalenko, I.N. (2005). *Introduction to Queuing Theory* [Vvedenie v teoriiu massovogo obsluzhivaniia]. M.: Book. 397 p. [in Russian].