

## ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНІ МАШИНИ

УДК 621.873.254

DOI: 10.33082/td.2019.1-4.03

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ О ТРАНСПОРТИРОВКЕ ГРУЗА НА ПОДВЕСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

А.О. Немчук<sup>1</sup>, П.М. Стрельцов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к.т.н., проректор по научной работе, доцент кафедры «Подъемно-транспортные машины и инжиниринг портового технологического оборудования»,  
Одесский национальный морской университет, Одесса, Украина,  
ORCID ID: 0000-0001-5633-8930, alnemchuk@gmail.com

<sup>2</sup> к.т.н., доцент кафедры «Подъемно-транспортные машины и инжиниринг портового технологического оборудования»,  
Одесский национальный морской университет, Одесса, Украина,  
super.strelcov@ukr.net

#### **Аннотация**

**Введение.** Малые грузоподъемные машины, такие как самоходные тали или легкие мостовые краны, транспортирующие грузы на гибком подвесе, часто включают в состав автоматических систем, выполняющих различные технологические процессы. Существенно затрудняют управление краном и приводят к удлинению его рабочего цикла возникающие при движении тележки колебания груза на гибком подвесе. Рассчитанные управления должны обеспечить гашение таких колебаний при подходе тележки к конечной точке пути. **Цель.** В работе исследуются методы определения оптимального по времени или близких к нему по эффективности управлений легкими мостовыми кранами при переносе ими груза на подвесе изменяющейся длины. **Результаты.** В ходе исследования предложен метод поиска оптимального управления легкими кранами и составленная на его основе программа расчета, которая позволяют определить параметры управления, обеспечивающего быстрое перемещение на требуемое расстояние крановой тележки с грузом на подвесе, длина которого изменяется по заданному закону. Получено, что оптимальное по быстрдействию управление тележкой является кусочно-постоянной функцией времени. Число и длительности интервалов постоянства управляющего параметра зависят от соотношения между длиной подвеса и скоростью ее изменения. При постоянной длине подвеса количество интервалов оптимального управления увеличивается с увеличением длительности перемещения тележки. Для современных кранов характерно такое соотношение между длиной подвеса и скоростью ее изменения, при котором оптимальное управление может состоять из достаточно большого числа интервалов, что

может затруднить его реализацию. В работе обосновано, что целесообразно искать квазиоптимальное управление, состоящее только из трех интервалов. В этом случае можно использовать существенно менее сложные и трудоемкие методы и программы расчета управлений. Выполненные расчеты показывают, что состоящее из трех интервалов квазиоптимальное управление практически не уступает по эффективности строго оптимальному. Доказано, что те же методы и программы могут использоваться и для расчета квазиоптимальных управлений, состоящих из пяти интервалов, когда колебания груза гасятся на этапах разгона и торможения. **Выводы.** В работе предложен метод расчета оптимального по времени и некоторых близких к нему по эффективности видов управления автоматическими легкими мостовыми кранами, обеспечивающих гашение колебаний груза при его транспортировке на гибком подвесе переменной длины. Рассмотренные виды управления имеют простую структуру и могут быть реализованы современными средствами автоматизации.

**Ключевые слова:** легкий мостовой кран, оптимальное по времени управление, гашение колебаний груза, переменная длина подвеса.

УДК 621.873.254

#### ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЩОДО ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ НА ПІДВІСІ ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

О.О. Немчук<sup>1</sup>, П.М. Стрельцов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к.т.н., проректор з наукової роботи, доцент кафедри «Підйомно-транспортні машини і інжиніринг портового технологічного устаткування»,  
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна,  
ORCID ID: 0000-0001-5633-8930, alnetchuk@gmail.com

<sup>2</sup> к.т.н., доцент кафедри «Підйомно-транспортні машини і інжиніринг портового технологічного устаткування»,  
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна, super.strelcov@ukr.net

#### Анотація

**Вступ.** Малі вантажопідйомні машини, такі як самохідні талі або легкі мостові крани, що транспортують вантажі на гнучкому підвісі, часто включають до складу автоматичних систем, що виконують різні технологічні процеси. Істотно ускладнюють управління краном і призводять до подовження його робочого циклу коливання вантажу, що виникають при русі візка на гнучкому підвісі. Розраховані управління повинні забезпечити гасіння таких коливань при підході візка до кінцевої точки шляху. **Мета.** В роботі досліджуються методи визначення оптимального за часом або близьких до нього по ефективності управлінь легкими мостовими кранами при перенесенні ними вантажу на підвісі змінної довжини. **Результати.** В ході дослідження запропоновано метод пошуку оптимального управління легкими кранами і складена на його основі програма розрахунку, яка дозволяють визначити параметри управління, що забезпечує якнайшвидше переміщення на необхідну відстань кранового візка з вантажем на підвісі, довжина якого змінюється по заданому закону. Отримано, що оптимальне за швидкістю управління візком є кусочно-

постійною функцією часу. Число і тривалості інтервалів сталості керуючого параметра залежать від співвідношення між довжиною підвісу і швидкістю її зміни. При постійній довжині підвісу кількість інтервалів оптимального управління збільшується зі збільшенням тривалості переміщення візка. Для сучасних кранів характерно таке співвідношення між довжиною підвісу і швидкістю її зміни, при якому оптимальне управління може складатися з досить великого числа інтервалів, що може утруднити його реалізацію. У роботі обґрунтовано, що доцільно шукати квазіоптимальне управління, що складається тільки з трьох інтервалів. В цьому випадку можна використовувати значно менш складні і трудомісткі методи і програми розрахунку управлінь. Виконані розрахунки показують, що квазіоптимальне управління, яке складається з трьох інтервалів практично не поступається за ефективністю строго оптимальному. Доведено, що ті ж методи і програми можуть використовуватися і для розрахунку квазіоптимальних управлінь, що складаються з п'яти інтервалів, коли коливання вантажу гасяться на етапах розгону і гальмування. **Висновки.** В роботі запропонований метод розрахунку оптимального за часом і деяких близьких до нього по ефективності видів управління автоматичними легкими мостовими кранами, що забезпечують гасіння коливань вантажу при його транспортуванні на гнучкому підвісі змінної довжини. Розглянуті види управління мають просту структуру і можуть бути реалізовані сучасними засобами автоматики.

**Ключові слова:** легкий мостовий кран, оптимальне за часом управління, гасіння коливань вантажу, змінна довжина підвісу.

UDC 621.873.254

NUMERICAL METHODS OF SOLUTION OF PROBLEMS  
ABOUT TIME OPTIMAL TRANSFERENCE OF LOAD  
ON THE ROPE WITH VARYING LENGTH

A.O. Nemchuk<sup>1</sup>, P.M. Streltsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> PhD, Vice-rector for Scientific Work, Associate Professor of the Department „Lifting-and-transporting Machines and Engineering of Port Technological Equipment”, Odessa National Maritime University, Odessa, Ukraine, ORCID ID: 0000-0001-5633-8930, alnemchuk@gmail.com

<sup>2</sup> PhD, Associate Professor of the Department „Lifting-and-transporting Machines and Engineering of Port Technological Equipment”, Odessa National Maritime University, Odessa, Ukraine, super.strelcov@ukr.net

**Abstract**

**Introduction.** Small hoisting machines, such as self-propelled hoists or lightweight overhead cranes, transporting loads on a flexible suspension, are often included in automatic systems that perform various technological processes. Significantly complicate the control of the crane and lead to the lengthening of its working cycle arising from the movement of the truck oscillations of the load on a flexible suspension. The calculated controls should provide damping of such vibrations when the cart approaches the end point

of the path. **Goal.** The paper investigates methods for determining the optimal time or close to it in terms of the effectiveness of controls for light bridge cranes when they carry cargo on a suspension of varying lengths. **Results.** In the course of the study, a search method for optimal control of light cranes and a calculation program based on it were proposed, which allow one to determine control parameters that provide the fastest possible travel of a crane truck with a load on a suspension whose length varies according to a given law. It was found that the trolley control optimal in speed is a piecewise constant function of time. The number and duration of intervals of constancy of the control parameter depend on the relationship between the length of the suspension and the rate of change. With a constant suspension length, the number of optimal control intervals increases with increasing duration of the trolley. For modern cranes, a relationship between the suspension length and its rate of change is characteristic, in which the optimal control may consist of a sufficiently large number of intervals, which may complicate its implementation. The paper substantiates that it is advisable to search for a quasi-optimal control consisting of only three intervals. In this case, you can use significantly less complex and time-consuming methods and programs for calculating controls. The performed calculations show that the quasi-optimal control consisting of three intervals is practically not inferior to strictly optimal in efficiency. It is proved that the same methods and programs can be used to calculate quasi-optimal controls, consisting of five intervals, when the oscillations of the load are damped at the stages of acceleration and deceleration. **Conclusions.** In this work, we propose a method for calculating the optimal time control and some types of control of automatic lightweight bridge cranes that are close to it in efficiency and provide damping of the load vibrations during its transportation on a flexible suspension of variable length. The considered types of control have a simple structure and can be implemented with modern automation equipment.

**Key words:** lightweight bridge crane, time optimal control, load sway damping, varying rope-length.

## Введение

Малые грузоподъемные машины, такие как самоходные тали или легкие мостовые краны, транспортирующие грузы на гибком подвесе, часто включают в состав автоматических систем (АСУ ТП), выполняющих различные технологические процессы.

Управление такими кранами осуществляется бортовой или внешней ЭВМ. Требуемые законы изменения управляющего параметра (управления) рассчитываются заранее в зависимости от геометрических условий рабочего цикла и вносятся в память ЭВМ, которая затем контролирует реализацию рассчитанных управлений в автоматическом режиме.

Легкие мостовые краны можно рассматривать как физические модели более крупных крановых установок, таких как используемые в портах грейферные или контейнерные причальные и складские перегружатели. Опробованные на малых кранах методы расчета и автоматической реализации управлений могут быть использованы при автоматизации и оптимизации работы крупных кранов, что позволит увеличить их производительность и обеспечить значительный экономический эффект [1].

### Постановка задачи

Существенно затрудняют управление краном и приводят к удлинению его рабочего цикла возникающие при движении тележки колебания груза на гибком подвесе. Рассчитанные управления должны обеспечить гашение таких колебаний при подходе тележки к конечной точке пути.

Методы расчета оптимального по времени и близких к нему управлений движением крана при переносе груза на подвесе постоянной длины разработаны достаточно подробно (см., например, [2]).

В реальных условиях для сокращения времени рабочего цикла стремятся как можно полнее совмещать горизонтальное перемещение груза с его подъемом (опусканием). Однако вопросы оптимизации управления крановыми установками при переносе груза на подвесе изменяющейся длины исследованы не столь глубоко (некоторые аспекты поиска рациональных управлений для подобных случаев рассмотрены в работах [3], [4]).

**Цель работы.** В предлагаемой работе исследуются методы определения оптимального по времени или близких к нему по эффективности управлений легкими мостовыми кранами при переносе ими груза на подвесе изменяющейся длины.

### Изложение основного материала исследования

Расчетная схема такого крана может быть представлена в виде двухмассовой системы (рис. 1).

Первая масса (тележка) перемещается по горизонтали, к ней на гибкой нерастяжимой нити подвешена вторая масса (груз). Положение первой массы определяется ее координатой  $X_T$ , положение второй – ее горизонтальной координатой  $X_C$  и длиной подвеса  $L$ . Обычно условия работы крана позволяют задавать длину подвеса в виде некоторой функции времени  $L(t)$ .

Характерной особенностью движения легких мостовых кранов, приводы которых имеют небольшие моменты инерции, является пренебрежимо малое время переходных процессов (разгонов и торможений) их механизмов, когда при включении двигателя механизм практически мгновенно приходит в движение с требуемой постоянной скоростью, а при отключении – так же мгновенно останавливается и остается неподвижным. Эта особенность позволяет в качестве параметра управления тележкой принимать ее скорость  $V$ .

Для исключения чрезмерных динамических нагрузок знак скорости тележки стараются не

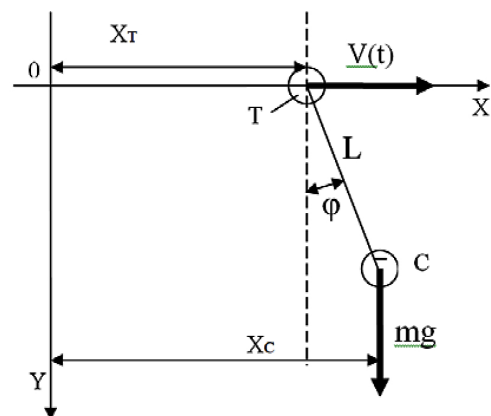


Рис. 1. Расчетная схема системы тележка-груз. Источник: Собственная разработка

менять (т.е. допускают движение тележки только в одном направлении – в сторону конечной точки пути). При этом ограничение на параметр управления можно записать в виде

$$0 \leq V \leq V_{MAX}. \quad (1)$$

Перемещение груза происходит под действием усилия в отклоненном от вертикали канате. Как показано в [4], уравнения движения материальной системы тележка-груз при переменной длине подвеса имеют вид:

$$X_T' = V; \quad X_C'' = g(X_T - X_C) / L(t). \quad (2)$$

После ввода новых переменных  $X_1 = X_T$ ;  $X_2 = X_C$ ;  $X_3 = X_C'$  уравнения (2) могут быть записаны в нормальной форме в виде системы трех дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных:

$$\begin{aligned} X_1' &= V; \\ X_2' &= X_3; \\ X_3' &= g(X_1 - X_2) / L(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Представленные уравнения можно рассматривать как математическую модель исследуемой механической системы. Эта модель может быть использована для определения законов изменения скорости тележки  $V(t)$  (управлений), обеспечивающих желаемый характер движения системы тележка-груз.

Будем полагать, что движение тележки начинается из состояния покоя, определяемого координатами

$$X_1^H = 0; \quad X_2^H = 0; \quad X_3^H = 0. \quad (4)$$

Конечное положение системы, отстоящее от начального на расстоянии  $S$ , определяется координатами:

$$X_1^K = S; \quad X_2^K = S; \quad X_3^K = 0. \quad (5)$$

Оптимальная задача о поиске управления, осуществляющего перемещение тележки на заданное расстояние из одного состояния покоя в другое, формулируется следующим образом.

Определить управление  $V^*(t)$ , переводящее механическую систему, описываемую уравнениями (3), из начального положения (4) в заданное конечное (5) за кратчайшее время при соблюдении ограничения (1) на параметр управления  $V$ .

Для выявления характера такого оптимального по быстрдействию управления воспользуемся методами теории оптимального управления механическими системами «принцип максимума» [5]. В соответствии с методикой решения оптимальных задач, рекомендуемой «принципом максимума», составим функцию Гамильтона  $H$  для исследуемой механической системы на основе уравнений ее математической модели:

$$H = \sum \phi_i X_i' = \phi_1 V + \phi_2 X_3 + \phi_3 g(X_1 - X_2) / L(t) \quad (6)$$

Входящие в выражение для  $H$  вспомогательные функции  $\phi_i$  определяются по формулам:

$$\phi_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i} \quad (7)$$

Таким образом, имеем:

$$\phi_1' = -\phi_3 g / L(t); \quad \phi_2' = \phi_3 g / L(t); \quad \phi_3' = -\phi_2. \quad (8)$$

Из системы (8) для вспомогательной функции  $\phi_1$  получим:

$$\phi_1^{(3)} + 2\phi_1' / L(t) + \phi_1' g / L(t) = 0. \quad (9)$$

Согласно «принципу максимума» оптимальное управление  $V^*(t)$  должно доставлять максимум гамильтониану  $H$ . Как видно из выражения (6), максимальное значение гамильтониан будет достигать, если при положительных значениях функции  $\phi_1$  управление будет принимать максимальное предельное значение  $V = V_{MAX}$ , при отрицательных – минимальное  $V = 0$ .

Таким образом, оптимальное управление  $V^*(t)$  является кусочно-постоянной функцией, принимающей на интервалах постоянства предельные значения. Моменты переключения управления с одного предельного значения на другое соответствуют точкам пересечения вспомогательной функцией  $\phi_1$  оси абсцисс.

При этом время  $T$  управления (перемещения тележки) будет равно сумме длительностей всех интервалов, а путь  $S$  тележки – равен сумме длительностей нечетных интервалов, умноженной на скорость  $V_{MAX}$  тележки.

Число и длительности интервалов оптимального управления определяются положением графика функции  $\phi_1$  относительно оси абсцисс.

Анализ уравнений (8) показывает, что функция  $\phi_1$  близка по своему виду функциям Бесселя и носит колебательный характер, т.е. может многократно пересекать ось абсцисс. Поскольку уравнение (9) является нелинейным дифференциальным уравнением, получить его аналитическое решение не представляется возможным. Однако расположение графика функции  $\phi_1$  относительно осей координат можно определить в результате численного интегрирования дифференциального уравнения (9). Для этого введем дополнительные переменные:

$$f_1 = \phi_1; \quad f_2 = \phi_1'; \quad f_3 = \phi_1'''. \quad (10)$$

Запишем уравнение (9) в нормальной форме в виде системы трех дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2; \\ f_2' &= f_3; \\ f_3' &= -(2L' f_3 + g f_2) / L(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Для численного интегрирования системы (11) необходимо указать начальные значения функций  $f_1, f_2, f_3$ . Для этого рассмотрим достаточно малый начальный участок движения механической системы (3), на котором длину подвеса  $L(t)$  можно считать постоянной. Уравнение (9) для этого участка можно записать в виде:

$$\phi_1^{(3)} + \phi_1' g / L^H = 0. \quad (12)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения таково:

$$\phi_1 = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L^H}} t + \alpha\right) + A, \quad (13)$$

где

$\alpha$  – начальная фаза функции  $\phi_1$ ;

$A$  – расстояние между осью функции  $\phi_1$  и осью абсцисс.

Области допустимых значений  $\alpha$  и  $A$  задаются неравенствами:

$$\pi / 2 < \alpha < 3\pi / 2; \quad 0 < A < 1. \quad (14)$$

Начальные значения функций  $f_2, f_3$ , как можно заключить из уравнений (10), связаны с параметрами  $\alpha$  и  $A$  выражениями:

$$f_1^H = \sin \alpha + A; \quad f_2^H = \sqrt{\frac{g}{L^H}} \cos \alpha; \quad f_3^H = -\frac{g}{L^H} \sin \alpha. \quad (15)$$

Таким образом, положение графика функции  $\phi_1$ , а, следовательно, управление  $V^*(t)$  определяется выбором значений параметров  $\alpha$  и  $A$ . Критерием оптимальности такого выбора (а, следовательно, и управления  $V^*(t)$ ) целесообразно принять величину энергии  $E$  остаточных колебаний груза, определяемую по формуле:

$$E = (X_3^K)^2 + g(X_1^K - X_2^K)^2 / L^K, \quad (16)$$

где первое слагаемое пропорционально кинетической энергии, а второе – потенциальной энергии отклоненного от вертикали груза.

Вычисление значений целевой функции  $E$  связано с достаточно сложной процедурой, состоящей в численном интегрировании уравнений математической модели (3) при заданном управлении  $V(t)$  до конечной точки пути ( $X_1 = S$ ). При оптимальном управлении  $V^*(t)$  энергия остаточных колебаний груза должна равняться нулю.

Таким образом, задача о поиске функции управления  $V^*(t)$ , минимизирующей время перемещения груза, свелась к экстремальной задаче о минимизации целевой функции  $E$ , зависящей только от двух параметров ( $\alpha$  и  $A$ ).

Для решения этой задачи можно предложить следующий алгоритм:

1. Задаются исходные значения параметров  $\alpha$  и  $A$ .
2. Определяют начальные значения функции  $\phi_1$  и ее производных.
3. Выполняют численное интегрирование уравнений (11), находят функцию  $\phi_1$  и соответствующее ей управление  $V(t)$ .



4. При найденном управлении выполняют интегрирование уравнений (3) математической модели тележки и вычисляют значение целевой функции  $E$  в конце пути.

5. Если условие  $E=0$  не выполняется, изменяют на шаг значения параметров  $\alpha$  и  $A$  в направлении уменьшения  $E$ .

6. Выполняют указанные выше процедуры при новых значениях  $\alpha$  и  $A$ .

Описанный выше итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не будет найдено управление  $V^*(t)$ , при котором целевая функция  $E$  станет равной (или достаточно близкой) нулю.

На основе предложенного алгоритма составлена программа численного расчета на ЭВМ оптимального управления, обеспечивающего наискорейшее перемещение тележки на заданное расстояние при условии полного гашения колебаний подвешенного груза к моменту остановки тележки в конечной точке.

Для подтверждения эффективности предложенного метода и успешной работы программы на рис. 2 представлены графики изменения параметров движения системы тележка-груз, построенные по результатам расчета на ЭВМ оптимального управления тележкой для следующих условий работы:

- путь перемещения тележки и груза  $S = 2,7$  м;
- максимальная скорость передвижения тележки  $V_{MAX} = 0,3$  м/с;
- скорость изменения длины подвеса груза  $L(t)' = 0,2$  м/с;
- на начальном участке движения длина подвеса уменьшается с постоянной скоростью от 4 до 2,25 м, а затем остается постоянной.

На расположенных ниже рисунках обозначены: 1 – скорость тележки (параметр управления); 2 – абсолютная скорость груза; 3 – путь тележки; 4 – путь груза; 5 – отклонение груза от вертикали; 6 – изменение длины подвеса; 7 – вспомогательная функция  $\phi_1$  гамильтониана  $H$ . Для удобства пользования рисунками значения скорости тележки и груза даны в увеличенном (в 5 раз) масштабе.

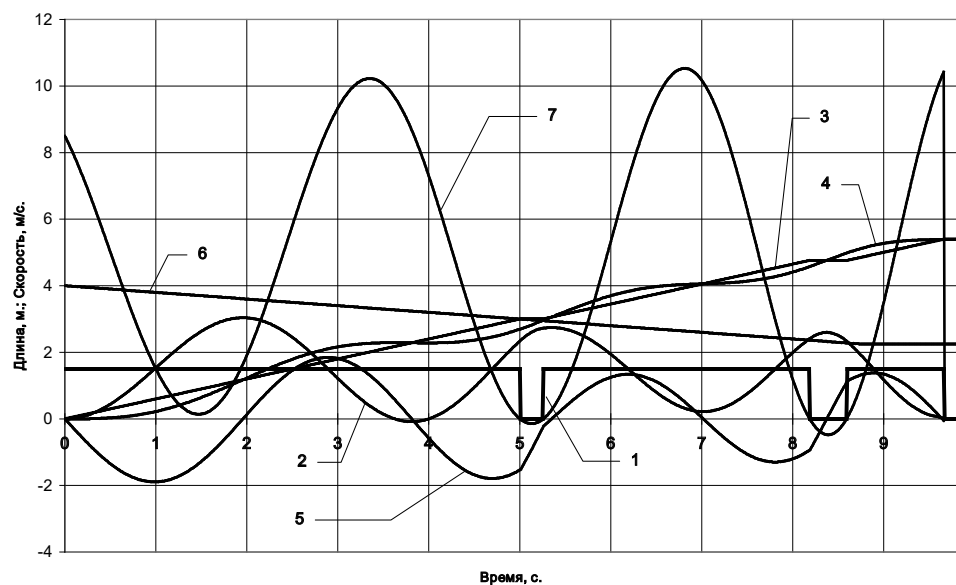


Рис. 2. Графики параметров движения тележки и груза при оптимальном управлении. Источник: Собственная разработка

Как видно из рис. 2, при указанном характере изменения длины подвеса вспомогательная функция  $\phi_1$  пересекает ось абсцисс в четырех точках. Т.е. оптимальное управление будет состоять из пяти интервалов. Общая длительность перемещения тележки при оптимальном управлении составляет 9,65 с.

Результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что при характерных для современных крановых установок соотношениях между длиной подвеса и скоростью ее изменения число интервалов оптимального управления  $V^*(t)$  увеличивается в зависимости от пути перемещения и может быть достаточно большим (в случае перемещения груза на подвесе постоянной длины потребное число переключений оптимального управления будет равно удвоенному числу полных колебаний груза). Необходимость выполнения большого числа переключений может существенно затруднить реализацию строго оптимальных управлений.

Если не предпринимать поиск числа интервалов управления, а заранее им задаться, можно воспользоваться менее трудоемким способом определения управления  $V_3(t)$  близкого к оптимальному и представляющего собой кусочно-постоянную функцию лишь с тремя интервалами постоянства величины управляющего воздействия (скорости тележки). Для поиска трех неизвестных переменных (длительностей интервалов управления) может быть использован метод, близкий к методу покоординатного спуска численного решения экстремальных задач [6]. Как и в предшествующем случае, при решении задачи о поиске такого квазиоптимального управления в качестве критерия оптимальности примем величину энергии остаточных колебаний груза  $E$ , рассчитываемую по формуле (16).

Для определения длительностей трех интервалов искомого управления воспользуемся тремя уравнениями математической модели (3), придерживаясь следующего алгоритма:

1. Выполняют численное интегрирование системы (3) при управлении  $V = V_{MAX}$  до момента  $T$ , когда величина  $X_1$  станет равной  $S$ .
2. Уменьшают на шаг  $h$  интегрирования значение  $T$  и определяют время первого переключения управления  $t_1 = T - h$ .
3. Назначают значение  $t_2$  времени второго переключения.
4. Время  $t_3$  окончания интегрирования определяют по формуле

$$t_3 = T - t_1 + t_2 . \quad (17)$$

5. Интегрируют систему (3), выполняя переключения управления в моменты  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ . Определяют значение целевой функции  $E$  в момент  $t_3$ .

6. Если  $E > 0$ , увеличивают на шаг время  $t_2$  и переходят к пункту 4.

7. Процесс увеличения  $t_2$  продолжают до тех пор, пока не будет определено минимальное при данном времени  $t_2$  значение целевой функции  $E$ .

8. Если при этом  $E > 0$ , уменьшают на шаг время  $t_1$  и переходят к пункту 3.

Описанный процесс повторяют до тех пор, пока при некоторых (искомых) значениях  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  целевая функция  $E$  не станет достаточно близкой к нулю.

В соответствии с представленным алгоритмом разработана программа численного поиска на ЭВМ квазиоптимального управления  $V_3(t)$  с тремя интервалами постоянства величины управляющего параметра. На рис. 3 представлены

построенные по результатам расчета графики параметров движения системы тележка-груз, определенные для тех же условий, что и в предшествующем случае.

Как видно из рисунка, рассчитанное управление обеспечивает полное гашение колебаний груза к окончанию движения тележки. Оно имеет иные длительности отдельных интервалов, однако общее время перемещения тележки так же, как и при оптимальном управлении, составляет 9,65с. Т.е. найденное квазиоптимальное управление является столь же эффективным, что и строго оптимальное.

При рассмотренных видах управления, состоящих из трех интервалов, перемещение тележки на всем пути сопровождается интенсивным раскачиванием груза, что вызывает дополнительные динамические нагрузки на механизмы и затрудняет реализацию управления.

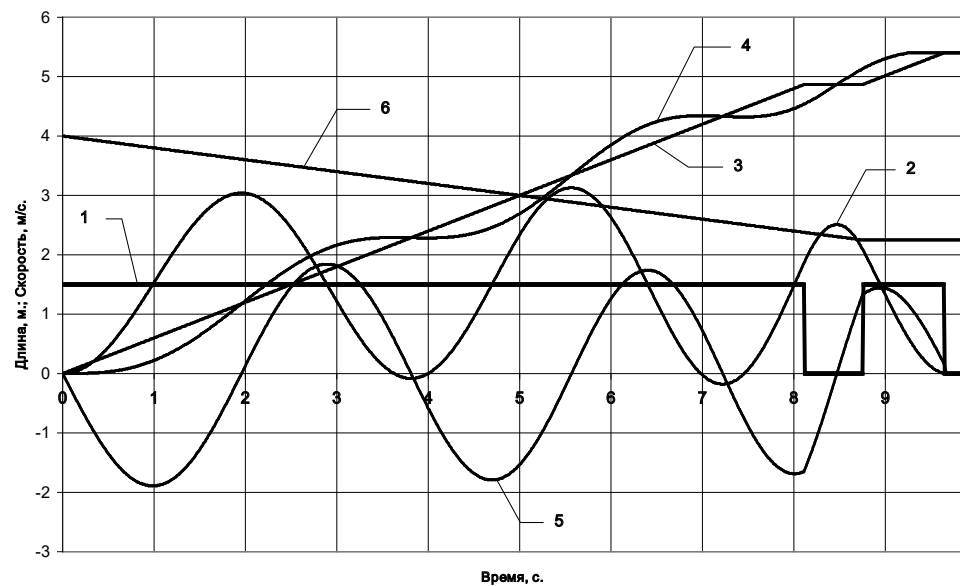


Рис. 3. Графики параметров движения тележки и груза при управлении, состоящем из трех интервалов Источник: Собственная разработка

Для устранения колебаний груза на большей части пути можно так организовать движение тележки, чтоб оно состояло из трех этапов.

На первом этапе выполняют разгон груза до горизонтальной скорости  $V_{MAX}$  так, чтоб к концу разгона подвес находился в вертикальном положении.

На втором этапе продолжают движение тележки со скоростью  $V_{MAX}$ , и груз, имея ту же горизонтальную скорость, будет двигаться синхронно с тележкой. При этом изменяющаяся длина подвеса не будет оказывать влияния на характер горизонтального движения груза.

На третьем этапе абсолютную скорость груза уменьшают до нуля так, чтоб в конечной точке пути груз оказался на одной вертикали с неподвижной тележкой.

Желательно, чтоб все этапы имели минимальную длительность. Для этого характер управления на этапах разгона и торможения должен соответствовать «принципу максимума» и определяться видом гамильтониана  $H$  (6) и вспомогательной функции  $\phi_1$  (9). Т.е. оптимальное по быстрдействию управление

тележкой на этапах разгона и торможения груза должно быть кусочно-постоянной функцией, принимающей на интервалах постоянства значения  $V = V_{MAX}$  при  $\phi_1 > 0$  и  $V = 0$  при  $\phi_1 < 0$ .

Можно показать, что длительности этапов разгона и торможения не будут превышать полупериода колебаний груза. За это время функция  $\phi_1$  успеет пересечь ось абсцисс только один раз, и оптимальное управление на каждом из этих этапов будет иметь только два интервала. Общее число интервалов такого управления будет равно пяти.

Для определения длительностей этих интервалов может быть использована (после внесения незначительных уточнений) та же программа, что и для расчета квазиоптимальных управлений. При помощи такой откорректированной программы было рассчитано для тех же условий, что и в предшествующих случаях, управление  $V_3(t)$ , обеспечивающее гашение колебаний на этапах разгона и торможения груза. По результатам расчета построены графики параметров движения системы тележка-груз, представленные на рис. 4.

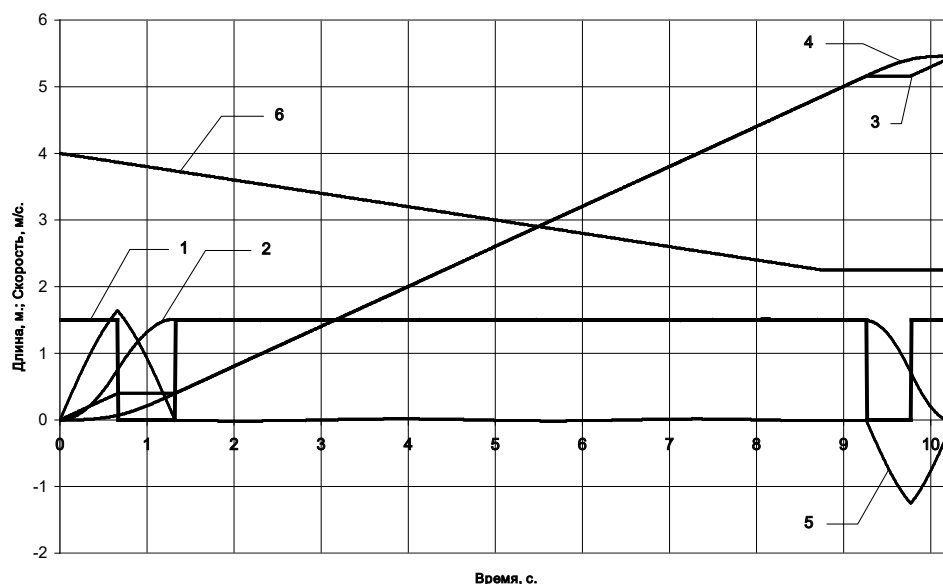


Рис. 4. Графики параметров движения тележки и груза при управлении, состоящем из 5 интервалов. Источник: Собственная разработка

Как видно из рисунка, при таком управлении груз большую часть пути перемещается с постоянной скоростью, оставаясь на одной вертикали с равномерно движущейся тележкой (хотя длина подвеса может при этом изменяться). Максимальное отклонение груза от вертикали (на этапе разгона) равно 0,17 м, что меньше, чем при оптимальном управлении.

Однако по главному показателю — общей длительности перемещения — квазиоптимальное управление  $V_3(t)$  заметно уступает строго оптимальному: при квазиоптимальном управлении  $V_3(t)$  время перемещения составляет 10,5 с, при оптимальном — 9,65 с.

### Выводы

1. Предложенный метод поиска оптимального управления легкими кранами и составленная на его основе программа расчета позволяют определить параметры управления, обеспечивающего быстрейшее перемещение на требуемое расстояние крановой тележки с грузом на подвесе, длина которого изменяется по заданному закону.

2. Оптимальное по быстродействию управление тележкой является кусочно-постоянной функцией времени. Число и длительности интервалов постоянства управляющего параметра зависят от соотношения между длиной подвеса и скоростью ее изменения. При постоянной длине подвеса количество интервалов оптимального управления увеличивается с увеличением длительности перемещения тележки.

3. Для современных кранов характерно такое соотношение между длиной подвеса и скоростью ее изменения, при котором оптимальное управление может состоять из достаточно большого числа интервалов (рис. 2), что может затруднить его реализацию.

4. Целесообразно, не задаваясь вопросом о количестве интервалов, сразу же искать квазиоптимальное управление, состоящее только из трех интервалов. В этом случае можно использовать существенно менее сложные и трудоемкие методы и программы расчета управлений.

5. Расчеты, выполненные по одной из таких программ, показывают, что состоящее из трех интервалов квазиоптимальное управление (рис.3) практически не уступает по эффективности строго оптимальному.

6. Те же методы и программы могут использоваться и для расчета квазиоптимальных управлений, состоящих из 5 интервалов, когда колебания груза гасятся на этапах разгона и торможения. При таком управлении (рис.4) большую часть пути груз перемещается синхронно с тележкой без раскачивания (длина подвеса при этом может меняться). Однако длительность перемещения в этом случае становится заметно больше (почти на 10%), чем при оптимальном управлении.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bao Q. Research and development of automatic bulk cargo equipment in modern ports. *Port Technology International*. 2009. № 41. pp. 88–93.
2. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Verschoof J. Cranes – Design, Practice and Maintenance. *Professional Engineering Publishing: Chapter 6. Sway and Swing; Automation the trolley travelling mechanism*. 2002. pp. 167–173.
4. Стрельцов П.М. Гашение колебаний груза при его перемещении на подвесе переменной длины. *Вісник ОНМУ*. 2012. № 35. С. 179–189.
5. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. М.: Наука, 1969. 408 с.
6. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. М.: Наука, 1988. 545 с.

### REFERENCES

1. Bao, Q. (2009). Research and development of automatic bulk cargo equipment in modern ports. *Port Technology International*, 41. 88–93.
2. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., & Sokolov, B.N. *Swing control* [Upravlenie kolebaniiami]. Moscow: Science, 1980. 384 p. [in Russian].
3. Verschoof, J. (2002). Cranes – Design, Practice and Maintenance. *Professional Engineering Publishing: Chapter 6. Sway and Swing; Automation the trolley travelling mechanism*. 167–173.
4. Streltsov, P.M. (2012). Damping load vibrations when moving it on a suspension of variable length [Gashenie kolebanii gruzha pri ego peremeshchenii na podvese peremennoi dliny]. *ONMU Bulletin*. 35, 179–189 [in Russian].
5. Boltyansky, V.G. *Mathematical Methods of Optimal Control* [Matematicheskie metody optimalnogo upravleniia]. Moscow: Science, 1969. 408 p. [in Russian].
6. Vasiliev, F.P. *Numerical methods for solving extreme problems* [Chislennyye metody resheniia ekstremalnykh zadach]. Moscow: Science, 1988. 545 p. [in Russian].