УДК 519.865:338.518 **DOI https://doi.org/10.33082/td.2023.3-18.03**

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ В ДУОПОЛІЇ КУРНО – БЕРТРАНА З ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИМИ ПРОДУКТАМИ

С.В. Мельников
к.е.н., доцент, доцент кафедри підприємництва і туризму,
Одеський національний морський університет, Одеса, Україна,
ORCID ID: 0000-0002-2627-9463

Анотація

Вступ*. Вже протягом багатьох років моделі Курно та Бертрана є важливими інструментами для аналізу конкурентної динаміки на ринку та розуміння того, як фірми приймають рішення щодо ціноутворення та виробництва. В моделі Курно фірми встановлюють обсяг виробництва, в моделі Бертрана – ціну. Незважаючи на свою ідеалізацію та деякі спрощення, ці моделі й досі мають актуальність та важливість для досліджень конкурентних процесів. На основі проведених економістами досліджень цінової та кількісної конкуренції на ринку олігополії можна стверджувати, що не існує такого виду конкуренції, який мав би абсолютну перевагу. В залежності від характеристик ринків, оптимальним буде той чи інший вид конкуренції. В той же час на практиці зустрічаються ринки, де одні фірми встановлюють обсяг пропозиції, а інші – ціну. На сьогодні моделі таких ринків не так добре досліджені, як моделі конкуренції тільки за Курно або тільки за Бертраном.* ***Метою*** *даної роботи є визначення та аналіз стійкості рівноваги у моделі просторової дуополії (Liang, W.J., Hwang, H., & Mai, C.C., (2006). Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot with asymmetric demands. Regional Science and Urban Economics, 36, 790-802) в умовах продуктової диференціації та асиметрії розмірів ринків. З метою максимізації прибутку фірми спочатку вибирають місце розташування, а потім вид конкуренції – за Курно або Бертраном.* ***Результати.*** *В роботі визначено стан рівноваги за Нешем у просторовій дуополії, коли одна з фірм встановлює обсяг пропозиції, а інша встановлює ціну. Досліджена стійкість рівноваги за Нешем. Визначена залежність області стійкості рівноваги від асиметрії розмірів ринків та продуктової диференціації. Виявлено нетривіальний вплив асиметрії і диференціації на конкурентну динаміку фірм та стійкість ринкової рівноваги. Результати аналізу представлено на карті динамічних режимів та біфуркаційних діаграмах.* ***Висновки.*** *В роботі доведено, що зростання рівня взаємозамінності (взаємодоповнюваності) збільшує (зменшує) площу області стійкості. Високий рівень взаємозамінності підсилює рівень конкуренції між фірмами та, одночасно, збільшує площу області стійкості. Високий рівень взаємодоповнюваності мотивує фірми до агломерації та, одночасно, зменшує площу області стійкості такої рівноваги.*

Ключові слова: *дуополія Курно – Бертрана, асиметрія ринків, продуктова диференціація, стійкість, біфуркація.*

© Мельников С.В., 2023

STABILITY ANALYSIS IN A COURNOT – BERTRAND DUOPOLY WITH DIFFERENTIATED PRODUCTS

S.V. Melnikov
PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Entrepreneurship & Tourism,
Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine,
ORCID ID: 0000-0002-2627-9463

Summary

Introduction*. For many years, the Cournot and Bertrand models have been important tools for analyzing competitive market dynamics and understanding how firms make pricing and production decisions. In the Cournot model, firms set the volume of production, in the Bertrand model – the price. Despite their idealization and some simplifications, these models still have relevance and importance for the research of competitive processes. On the basis of studies conducted by economists on price and quantity competition in the oligopoly market, it can be argued that there is no such type of competition that would have an absolute advantage. Depending on the characteristics of the markets, one or another type of competition will be optimal. At the same time, in practice there are markets where some firms set the volume of supply, while others set the price. To date, the models of such markets are not as well researched as the Cournot-only or Bertrand-only competition models.* ***The purpose*** *of this paper is to define and analyze the stability of the equilibrium in the spatial duopoly model (Liang, W.J., Hwang, H., & Mai, C.C., (2006). Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot with asymmetric demands. Regional Science and Urban Economics, 36, 790-802) under conditions of product differentiation and asymmetry of market sizes. In order to maximize profits, firms first select a location and then the type of competition – Cournot or Bertrand.* ***Results****. The paper defines the state of Nash equilibrium in a spatial duopoly, when one of the firms sets the volume of supply, and the other sets the price. The stability of the Nash equilibrium was investigated. The dependence of the area of equilibrium stability on the asymmetry of market sizes and product differentiation is determined. The non-trivial impact of asymmetry and differentiation on the competitive dynamics of firms and the stability of market equilibrium has been revealed. The results of the analysis are presented on a map of dynamic modes and bifurcation diagrams.* ***Conclusions****. The paper proves that the growth of the level of substitutability (complementarity) increases (decreases) the area of the stability region. A high level of substitutability strengthens the level of competition between firms and, at the same time, increases the area of the stability region. A high level of complementarity motivates firms to agglomerate and, at the same time, reduces the stability region of such an equilibrium.*

Key words: *Cournot – Bertrand duopoly, markets asymmetry, product differentiation, stability, bifurcation.*

Вступ та постановка проблеми. Вже протягом багатьох років економісти обговорюють переваги цінової та кількісної конкуренції на ринку олігополії. На сьогодні можна стверджувати, що не існує такого виду конкуренції, який мав би абсолютну перевагу. Залежно від характеристик ринків, що моделюються, оптимальним буде той чи інший вид конкуренції.

В одній з перших ґрунтовних робіт із цієї тематики [1] показано, що фірми вибирають конкуренцію за Курно тільки при взаємозамінності, а при взаємодоповнюваності їм вигідна конкуренція за Бертраном. При цьому для споживачів конкуренція за Бертраном вигідна незалежно від виду продуктової диференціації.

Дослідження впливу виду конкуренції на процеси агломерації і дисперсії фірм в просторових моделях проведено у роботах [2–7]. Отримано, що при цінової конкуренції фірми будуть прагнути до максимальної дисперсії для подолання парадоксу Бертрана. При кількісної конкуренції розташування фірм істотно залежить від транспортних витрат. Низькі транспортні витрати стимулюють фірми агломеруватись і продавати на всіх ринках. При високих транспортних витратах фірмам вигідно монополізувати найближчій ринок і мінімізувати поставки на сусідні ринки.

Подальші дослідження пов'язані з урахуванням в просторових моделях продуктової диференціації [8$ 9] та асиметрії розмірів ринків [10]. В [8; 9] показано, що взаємозамінність (взаємодоповнюваність) продуктів підсилює прагнення фірм до дисперсії (агломерації). Урахування асиметрії розмірів ринків в [10] призвело до зворотних від [1] результатів. Отримано, що при досить високій асиметрії ринків фірмам може бути вигідна цінова, а споживачам – кількісна конкуренція.

Зазначимо, що на практиці зустрічаються ринки, де одні фірми встановлюють обсяг пропозиції, а інші – ціну. На сьогодні моделі таких ринків не так добре досліджені, як моделі конкуренції тільки за Курно або тільки за Бертраном. Серед праць, присвячених даній проблематиці, відзначимо роботи [11–15].

Метою роботи є визначення та аналіз стійкості рівноваги в просторовій дуополії [10] при конкуренції за Курно-Бертраном.

Виклад основного матеріалу.

1. Модель

Два ринки розташовані на кінцях лінії одиничної довжини. Між ринками існує асиметрія – розмір ринку з лівого боку (L) перевищує розмір ринку з правого боку (S). На лінії конкурують дві фірми з індексами i та j, $i, j = 1,2$, $i \neq j$, фірма i конкурує за Курно, а фірма j конкурує за Бертраном. На обох ринках фірми продають диференційовану продукцію, арбітраж між споживачами виключений. Відстань фірми j до L-ринка дорівнює x_i. Обмеження на взаємне розташування фірм відсутні. Кожна фірма несе транспортні витрати на постачання одиниці продукції на одиницю відстані. Мета фірм полягає в максимізація свого прибутку. Для побудови функцій попиту скористаємося квадратичною функцією корисності з [1]:

$$U^L = q_i^L + q_j^L - \frac{\left(q_i^L\right)^2 + 2\phi q_i^L q_j^L + \left(q_j^L\right)^2}{2\gamma},$$

$$U^S = q_i^S + q_j^S - \frac{\left(q_i^S\right)^2 + 2\phi q_i^S q_j^S + \left(q_j^S\right)^2}{2},$$

де q_i^L, q_i^S – обсяги пропозиції фірми і на L и S ринках відповідно; ϕ – коефіцієнт продуктової диференціації, $0 < |\phi| < 1$; $\gamma > 1$ – коефіцієнт асиметрії ринків. Цільові функції споживачів на ринках:

$$U^L - p_i q_i^L - p_j q_j^L \to \max_{q_i^L,\, q_j^L}, U^S - p_i q_i^S - p_j q_j^S \to \max_{q_i^S,\, q_j^S}. \qquad (1)$$

де $p_i > 0$, $p_j > 0$ – ціни на продукцію фірм.

З умов першого порядку для функцій (1), знаходимо функції попиту:

$$p_i^L = 1 - \phi - \frac{1-\phi^2}{\gamma} q_i^L + \phi p_j^L, \quad p_i^S = 1 - \phi - q_i^S(1-\phi^2) + \phi p_j^S,$$
$$q_j^L = \gamma - \gamma p_j^L - \phi q_i^L, \qquad q_j^S = 1 - p_j^S - \phi q_i^S.$$

Приймемо, що фірми покривають обидва ринки, тобто $q_i^L > 0$, $q_i^S > 0$.

Цільові функції фірм:

$$F_i^{C-B} = q_i^L(p_i^L - tx_i) + q_i^S\left(p_i^S - t(1-x_i)\right) \to \max_{q_i^L,\, q_i^S},$$
$$F_j^{C-B} = q_j^L(p_j^L - tx_j) + q_j^S\left(p_j^S - t(1-x_j)\right) \to \max_{p_j^L,\, p_j^S}.$$

Конкурентна гра складається з двох етапів. На першому етапі фірми одночасно вибирають своє місце розташування. На другому етапі, з огляду на рішення про місце розташування, фірма *i* встановлює обсяги пропозиції, а фірма *j* встановлює ціни. Рівновага моделі знаходиться за допомогою методу зворотної індукції.

2. Рівновага

Згідно з методом зворотної індукції починаємо з другого етапу. З умов оптимальності першого порядку отримуємо криві реакції фірм:

$$q_i^L = \gamma\frac{1-\phi+\phi p_j^L - tx_i}{2(1-\phi^2)}, \qquad q_i^S = \frac{1-\phi+\phi p_j^S - t(1-x_i)}{2(1-\phi^2)},$$
$$p_j^L = \frac{\gamma - \phi q_i^L + \gamma t x_j}{2\gamma}, \qquad p_j^S = \frac{1-\phi q_i^S + t(1-x_j)}{2}. \tag{2}$$

Розв'язуючи системи рівнянь (2), знаходимо рівноважні обсяги пропозицій та ціни:

$$q_i^L = \gamma\frac{2-\phi-2tx_i+\phi t x_j}{4-3\phi^2}, \qquad q_i^S = \frac{2-\phi-2t(1-x_i)+\phi t(1-x_j)}{4-3\phi^2},$$
$$p_j^L = \frac{2-\phi-\phi^2+2tx_j(1-\phi^2)+\phi t x_i}{4-3\phi^2},$$
$$p_j^S = \frac{2-\phi-\phi^2+2t(1-x_j)(1-\phi^2)+\phi t(1-x_i)}{4-3\phi^2}.$$

Умови покриття ринків:

$$q_i^L > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < t_{cov} = \frac{2-\phi}{2x_i - \phi x_j},$$
$$q_j^L > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < t_{cov} = \frac{2-\phi-\phi^2}{(2-\phi^2)x_j - \phi x_i},$$
$$q_i^S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < t_{cov} = \frac{2-\phi}{2(1-x_i) - \phi(1-x_j)},$$
$$q_j^S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < t_{cov} = \frac{2-\phi-\phi^2}{(2-\phi^2)(1-x_j) - \phi(1-x_i)}. \tag{3}$$

Прибутки:

$$F_i^{C-B} = (1-\phi^2)\left(\left(q_i^L\right)^2/\gamma + \left(q_i^S\right)^2\right), \quad F_j^{C-B} = \left(q_j^L\right)^2/\gamma + \left(q_j^S\right)^2. \tag{4}$$

На основі результатів [9] порівняємо рівноважні прибутки фірм у дуополії Курно-Бертрана з прибутками фірм у дуополіях Курно та Бертрана:

$$F_i^{C-B} = \xi F_i^{C-C}, \quad F_j^{C-B} = \xi F_j^{B-B}, \quad 0 < \xi = \frac{(4-3\phi^2)^2 - \phi^6}{(4-3\phi^2)^2} < 1.$$

Таким чином, у дуополії Курно-Бертрана фірмі *i* вигідно щоб фірма *j* конкурувала за Курно, а фірмі *j* вигідно щоб фірма *i* конкурувала за Бертраном.

На першому етапі фірми оптимізують своє місце розташування при даному місці розташування конкурента. З умов другого порядку (5) випливає, що функції прибутку (4) строго опуклі вниз за місцем розташування:

$$\frac{\partial^2 F_i^{C-B}}{\partial x_i^2} = \frac{8t^2(\gamma+1)(1-\phi^2)}{(4-3\phi^2)^2} > 0, \frac{\partial^2 F_j^{C-B}}{\partial x_j^2} = \frac{2t^2(\gamma+1)(2-\phi^2)^2}{(4-3\phi^2)^2} > 0. \quad (5)$$

Таким чином, в стані рівноваги фірми будуть розташовуватися тільки на ринках, незалежно від рівня транспортних тарифів. Всього можливі чотири варіанти рівноважного розташування фірм (x_i, x_j): агломерація $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, та дисперсія $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$.

Знаючи рівноважні розташування фірм, ми можемо завершити аналіз умов покриття ринків (3).

У випадку агломерації фірми зможуть поставити товар на сусідній ринок за умови: $t_{cov}^{agg} < 1$. У випадку дисперсії фірми зможуть поставити товар на сусідній ринок за умови: $t_{cov}^{dis} < \min\left\{\frac{2-\phi}{2};\ \frac{2-\phi-\phi^2}{2-\phi^2}\right\}$. Таким чином, у випадку дисперсії фірми більш чутливі до зміни транспортного тарифу при взаємозамінних продуктах.

Однією з цілей даної роботи є аналіз стійкості рівноваги Курно-Бертрана. Рівноважне розташування фірм залежить від співвідношення між рівнями асиметрії, диференціації та транспортного тарифу. З можливих ситуацій розглянемо випадок високого рівня асиметрії. У [9; 10] доводиться, що за достатньо високої асиметрії фірми прагнутимуть до агломерації на *L*-ринку. Отже, проаналізуємо стійкість рівноваги на *L*-ринку при агломерації фірм на *L*-ринку.

3. Аналіз стійкості

Приймемо, що фірми конкурують в умовах неповної інформації та приймають рішення на основі динаміки свого очікуваного граничного прибутку [16]. Тоді конкурентну взаємодію фірм можна представити у вигляді двовимірного відображення:

$$q_i^L(n+1) = q_i^L(n)\left[1 + \alpha\frac{\partial F_i^L}{\partial q_i^L}\right] =$$

$$= q_i^L(n)\left[1 + \alpha\left(1 - \phi - 2\frac{1-\phi^2}{\gamma}q_i^L(n) + \phi p_j(n)\right)\right],$$

$$p_j^L(n+1) = p_j^L(n)\left[1 + \beta\frac{\partial F_j^L}{\partial p_j^L}\right] = p_j^L(n)\left[1 + \beta\left(\gamma - 2\gamma p_j^L(n) - \phi q_i^L(n)\right)\right]. \quad (6)$$

де n – момент часу, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; параметри $\alpha > 0$ та $\beta > 0$ характеризують відносний приріст на одиницю граничного прибутку (швидкість адаптації).

Відображення (6) має чотири нерухомі точки періоду один:

$$E_1(0,\ 0),\ E_2\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\ E_3\left(\frac{\gamma}{2(1+\phi)},\ 0\right),\ E^*(q_i^*,\ p_j^*),$$

де $E^*(q_i^*,\ p_j^*)$ – точка рівноваги за Нешем, $q_i^* = \frac{\gamma(2-\phi)}{4-3\phi^2}$, $p_j^* = \frac{2-\phi-\phi^2}{4-3\phi^2}$.

Точки E_1, E_2 та E_3 не задовольняють обмеженням моделі і в подальшому не розглядаються. Дослідимо стійкість рівноваги за Нешем.

Характер стійкості нерухомої точки визначається властивостями матриці Якобі. Матриця Якобі відображення (6)

$$J = \begin{pmatrix} 1+\alpha\left(1-\phi-4\frac{1-\phi^2}{\gamma}q_i^L(n)+\phi p_j(n)\right) & \alpha\phi q_i^L(n) \\ -\beta\phi p_j^L(n) & 1+\beta\left(\gamma-4\gamma p_j^L(n)-\phi q_i^L(n)\right) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матриця Якобі відображення (7) у нерухомій точці E^*:

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 1-\frac{2\alpha(1-\phi^2)(2-\phi)}{4-3\phi^2} & \frac{\alpha\phi\gamma(2-\phi)}{4-3\phi^2} \\ -\frac{\beta\phi(1-\phi)(2+\phi)}{4-3\phi^2} & 1-\frac{2\beta\gamma(1-\phi)(2+\phi)}{4-3\phi^2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для аналізу стійкості нерухомої точки E^* визначимо інваріанти матриці (8):

$$T = Tr\left(J(E^*)\right) = 2-2(\alpha\phi_1+\beta\gamma\phi_2),$$
$$D = Det\left(J(E^*)\right) = 1-2(\alpha\phi_1+\beta\gamma\phi_2)+\alpha\beta\gamma\phi_3, \quad (9)$$

де $\phi_1 = \frac{(1-\phi^2)(2-\phi)}{4-3\phi^2} > 0;\quad \phi_2 = \frac{(1-\phi)(2+\phi)}{4-3\phi^2} > 0;\quad \phi_3 = \frac{(1-\phi)(4-\phi^2)}{4-3\phi^2} > 0.$

Відповідно до критерію Джурі, відображення (6) у нерухомій точці E^* є стійким за умов:

$$1-T+D>0 \ \Leftrightarrow\ \alpha\beta\gamma\phi_3>0,$$
$$1+T+D>0 \quad\Leftrightarrow\quad \beta<\frac{4(1-\alpha\phi_1)}{\gamma(4\phi_2-\alpha\phi_3)},$$
$$D<1 \quad\Leftrightarrow\quad \beta<\frac{2\alpha\phi_1}{\gamma(\alpha\phi_3-2\phi_2)}. \quad (10)$$

Нерівності (10) визначають область, в якій нерухома точка E^* є стійкою. З (10) випливає, що перша нерівність завжди виконується, тобто дотична біфуркація відсутня. При порушенні другої нерівності, $\beta^{flip} = \frac{4(1-\alpha\phi_1)}{\gamma(4\phi_2-\alpha\phi_3)}$, виникають стійкі коливання показників, що супроводжуються каскадом біфуркацій подвоєння періоду. При порушенні третьої нерівності, $\beta^{NS} = \frac{2\alpha\phi_1}{\gamma(\alpha\phi_3-2\phi_2)}$, відбувається біфуркація Неймарка-Сакера й динаміка показників переходить у квазіперіодичний режим.

Таким чином, область стійкості відображення (6) у нерухомій точці E^* визначається наступними співвідношеннями:

$$0<\beta<\beta^{flip} \qquad 0<\alpha\le\min\{\alpha_1,\ \alpha_2\},$$
$$0<\beta<\beta^{NS} \qquad \min\{\alpha_1,\ \alpha_2\}<\alpha\le\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},$$
$$\beta^{flip}<\beta<\beta^{NS} \qquad \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}<\alpha\le\max\{\alpha_1,\ \alpha_2\}, \quad (11)$$

де $\alpha_1 = \frac{1-\phi_4}{\phi_1},\quad \alpha_2 = \frac{1+\phi_4}{\phi_1},\quad \phi_4 = \frac{\phi}{\sqrt{4-3\phi^2}}$.

Область стійкості на площині параметрів (α, β) представлено на рис. 1(а). Темнішим відтінком позначена область, в якій мультиплікатори є комплексно-спряженими. Ця область обмежена двома лініями (12), отриманими з умови D = *T*⅋4

$$\beta_{1,2} = \alpha \frac{\phi_3 - 2\phi_1\phi_2 \pm \phi_3\phi_4}{2\gamma\phi_2^2}. \quad (12)$$

Далі розглянемо біфуркацію корозмірності 2, а саме резонанс 1:2. Цій біфуркації відповідають точки перетину ліній біфурк ації подвоєння періоду та біфуркації Неймарка-Сакера. Тобто вона має місце при одночасному виконанні умов:

$$1 + T + D = 0 \text{ та } D = 1. \quad (13)$$

З (13) випливає, що криві β^{flip} та β^{NS} перетинаються у точках (α_1, β^{NS} (α_1)) та (α_2, β^{NS} (α_2)), які і є точками резонансу 1:2.

З (11) випливає, що площа області стійкості обернено пропорційна асиметрії ринків. Зростання асиметрії стискає область стійкості по осі β, та навпаки. Таким чином, вплив асиметрії ринків має двоякий ефект. Високий рівень асиметрії, з одного боку, збільшує попит на L-ринку, а з іншого боку зменшує область стійкості ринкової рівноваги.

Вплив продуктової диференціації не такий очевидний. Для аналізу впливу диференціації визначимо площу області стійкості як функцію асиметрії та диференціації:

$$S = \int_0^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} \beta^{flip} d\alpha + \int_{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}}^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}} \beta^{NS} d\alpha - \int_{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}} \beta^{flip} d\alpha.$$

Залежність площі області стійкості від диференціації за фіксованого рівня асиметрії представлена на рис. 1(б).

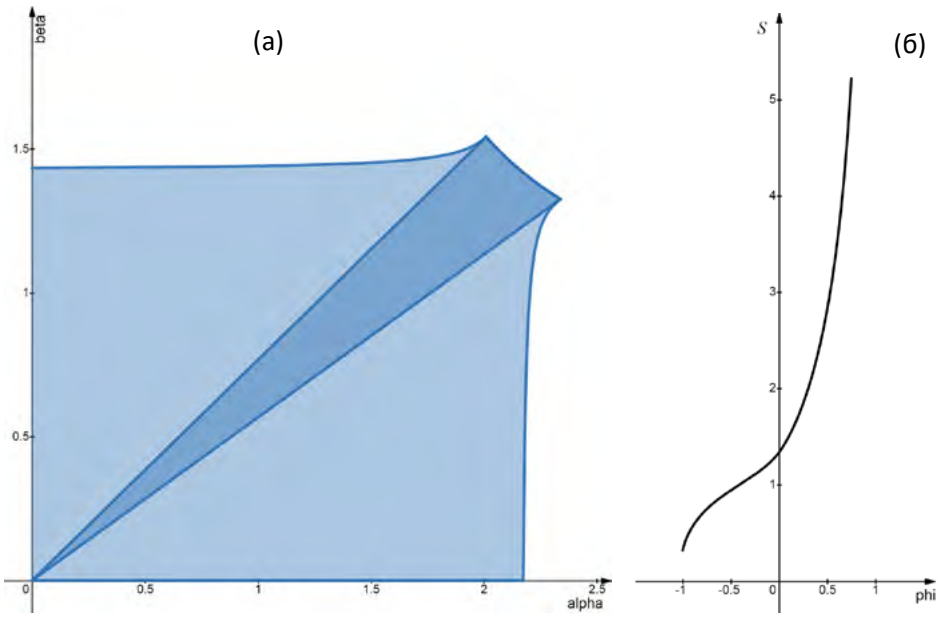


Рис. 1. (а) Область стійкості нерухомої точки E на площині параметрів (α, β) при γ = 1,5, ϕ = 0,15. (б) Залежність площі області стійкості від диференціації при γ = 3*

Джерело: власна розробка

Таким чином, зростання рівня взаємозамінності (взаємодоповнюваності) збільшує (зменшує) площу області стійкості. Отже, вплив продуктової диференціації також виявився нетривіальним. Високий рівень взаємозамінності підсилює рівень конкуренції між фірмами та, одночасно, збільшує площу області стійкості. Високий рівень взаємодоповнюваності мотивує фірми до агломерації та, одночасно, зменшує стійкість такої рівноваги.

Отримані результати дозволяють встановити граничні значення швидкості адаптації фірм. З рис. 1(а) бачимо, що рівновага втрачає стійкість при $\alpha > 2{,}1$ або $\beta > 1{,}4$. Таким чином, фірма, яка конкурує за Бертраном, є більш чутливою до зміни швидкості адаптації.

Наступний етап дослідження проведемо за допомогою комп'ютерного моделювання в програмі E&F Chaos. Приймемо начальні умови: $q(0) = p(0) = 0{,}1$. Карту динамічних режимів на площині параметрів (α, β) представлено на рис. 2.

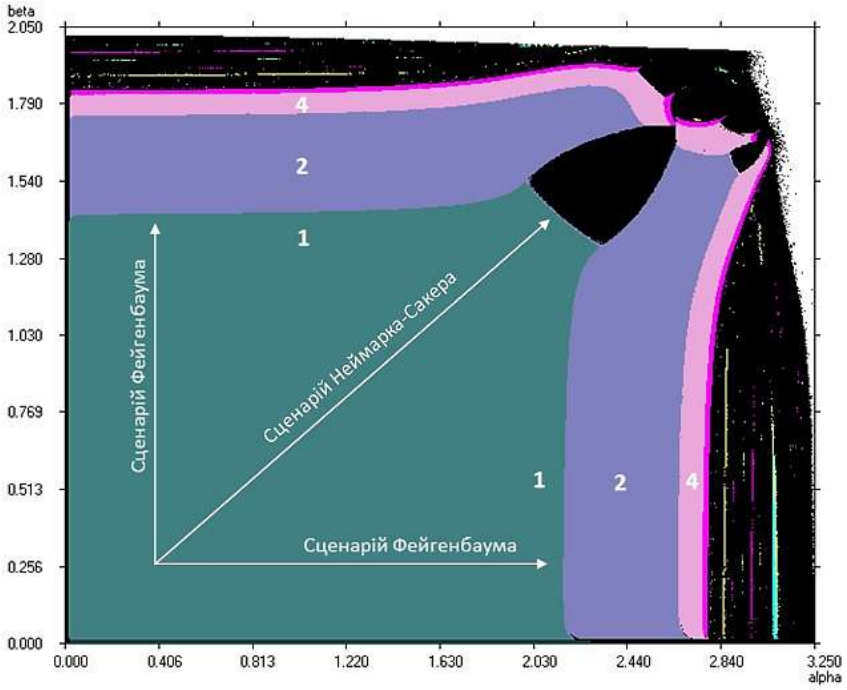
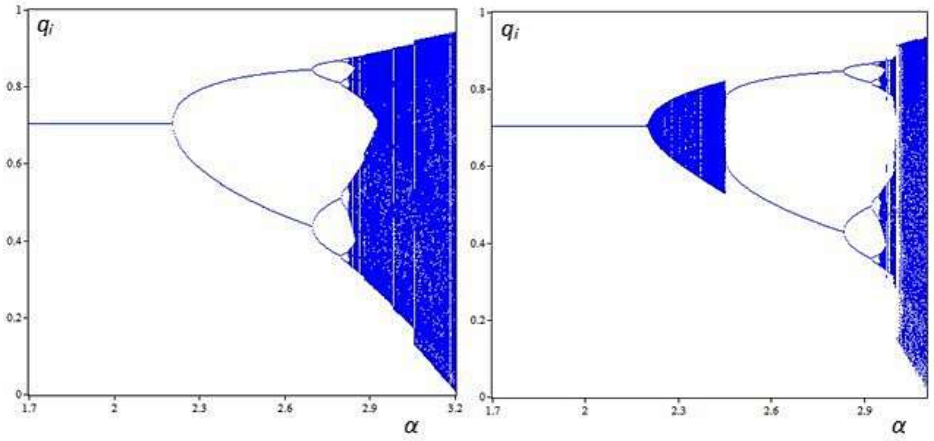


Рис. 2. Карта динамічних режимів на площині параметрів (α, β) при γ = 1,5, ϕ = 0,15. Цифрами позначені періоди режимів, чорна область відповідає хаосу, біла – розбіжності траєкторій

Джерело: власна розробка

На рис. 2 період 1 відповідає рівновазі за Нешем. Зі зростанням параметрів α та β можлива динаміка за сценарієм Фейгенбаума або Неймарка-Сакера. За сценарієм Фейгенбаума виникають стійкі коливання показників, що супроводжуються каскадом біфуркацій подвоєння періоду, спочатку періоду 2, потім 4 та 8. За сценарієм Неймарка-Сакера динаміка показників переходить у квазіперіодичний режим. Біфуркаційні лінії на поверхні параметрів представляються межами відповідних областей. Вони накопичуються до критичної лінії, яка є межею хаосу.

Зазначимо, що перехід до сценарію Фейгенбаума можливий не лише напряму зі стану рівноваги, а й через область хаосу. Наприклад, за фіксованого значення параметра β = 1,4 та зростання параметра α стан рівноваги переходить у режим хаосу, який потім змінюється каскадом біфуркацій подвоєння періоду. Відповідні біфуркаційні діаграми для рівноважного обсягу пропозиції фірми i представлені на рис. 3.



(а) (б)

Рис. 3. Біфуркаційні діаграми для обсягу пропозиції і-ї фірми при γ = 1,5, ϕ = 0,15. (а) β = 1 та 1,7 ≤ α ≤ 3,2. (б) β = 1,4 та 1,7 ≤ α ≤ 3,1

Зростання рівня диференціації призводить до збільшення області розбіжності траєкторій по осі β та появі областей квазіперіодичних режимів за сценарієм Неймарка-Сакера. Розглянемо це на прикладі взаємозамінності.

Наприклад, при ϕ = 0,35 з'являються області циклів довжиною 3, 6 та 7 (рис. 4). При ϕ = 0,5 3-цикл та 6-цикл зміщуються у напрямку лінії біфуркації Неймарка-Сакера, у 7-цикла зменшується, а у 5-цикла збільшується площа (рис. 5).

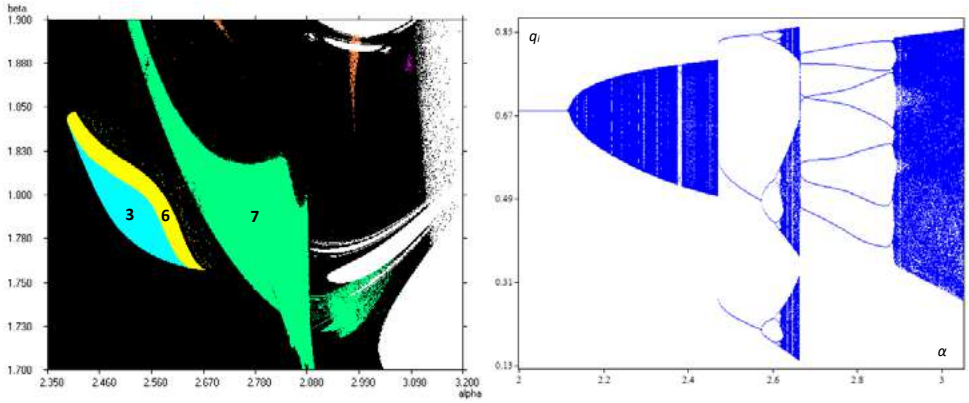


Рис. 4. Карта режимів при γ = 1,5, ϕ = 0,3 5, 1,7 ≤ β ≤ 1,9, 2,35 ≤ α ≤ 3,2 та біфуркаційна діаграма при γ = 1,5, ϕ = 0,35, β = 1,79, 2 ≤ α ≤ 3,05

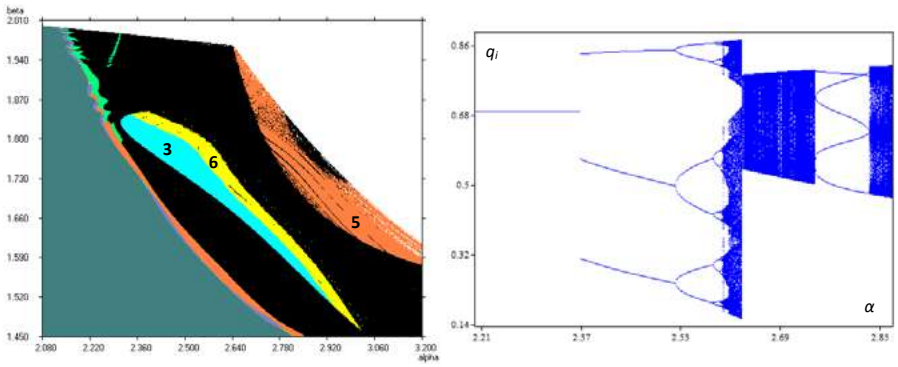


Рис. 5. Карта режимів при $\gamma = 1{,}5$, $\phi = 0{,}5$, $1{,}45 \le \beta \le 2{,}01$, $2{,}08 \le \alpha \le 3{,}2$ та біфуркаційна діаграма при $\gamma = 1{,}5$, $\phi = 0{,}5$, $\beta = 1{,}79$, $2{,}2 \le \alpha \le 2{,}87$

Зростання взаємозамінності до $\phi = 0{,}65$ призводить до виникнення області значень параметрів α і β, за яких може реалізуватися як стійка стаціонарна точка, так і стійкі цикли довжиною 3 та 6, тобто виникає мультистабільність. Перехід до стійкої рівноваги або до 3-циклу, а потім 6-циклу залежить від початкових умов. Дослідимо – як впливає початкове значення ціни фірми j на карти режимів та динаміку рівноважного обсягу пропозиції фірми i. Результати моделювання представлено на рис. 6 та рис. 7.

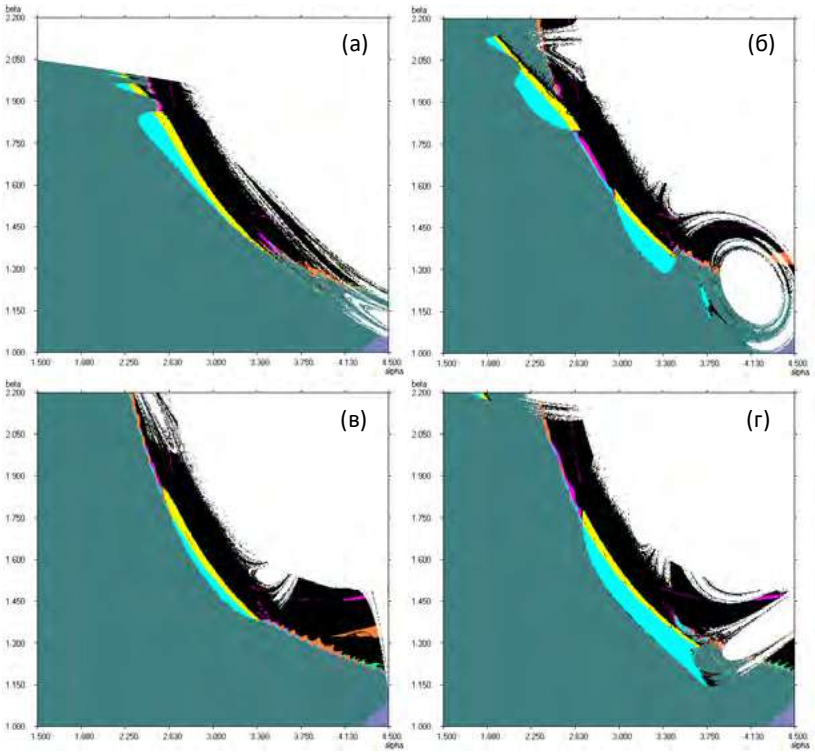


Рис. 6. Карта режимів при $\gamma = 1{,}5$, $\phi = 0{,}6$ 5, $1 \le \beta \le 2{,}2$, $1{,}5 \le \alpha \le 4{,}5$, $q(0) = 0{,}1$. (а) $p(0) = 0{,}1$. (б) $p(0) = 0{,}2$. (в) $p(0) = 0{,}5$. (г) $p(0) = 0{,}6$

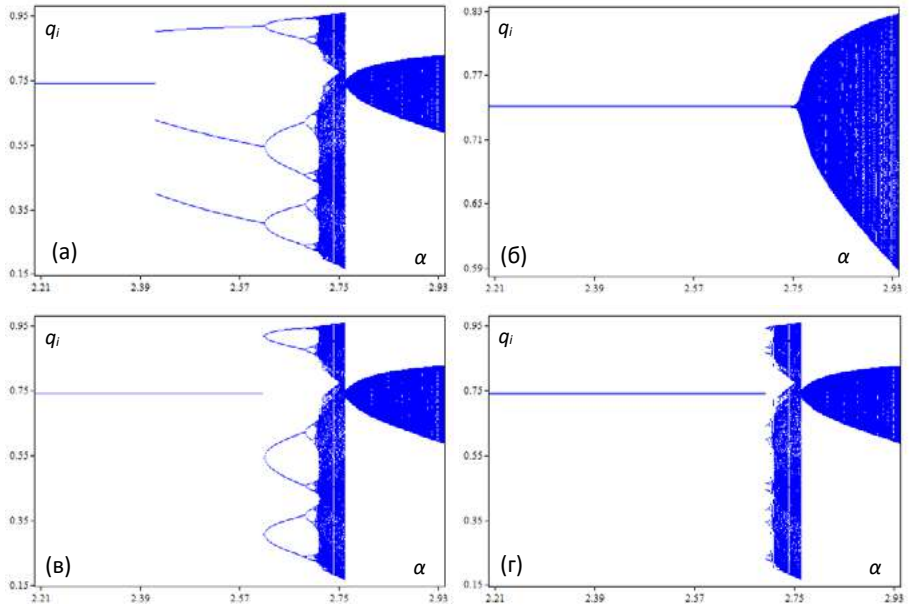


Рис. 7. Біфуркаційні діаграми при $\gamma = 1{,}5$, $\phi = 0{,}65$, $\beta = 1{,}79$, $2{,}2 \leq \alpha \leq 2{,}94$, $q(0) = 0{,}1$. (а) $p(0) = 0{,}1$. (б) $p(0) = 0{,}2$. (в) $p(0) = 0{,}5$. (г) $p(0) = 0{,}6$

На рис. 7 бачимо, що в залежності від початкового рівня ціни рівноважний обсяг пропозиції до лінії Неймарка-Сакера може переходити: (а) спочатку 3-цикл, потім каскад біфуркацій подвоєння; (б) напряму до хаосу за сценарієм Неймарка-Сакера; (в) спочатку 6-цикл, потім каскад біфуркацій подвоєння; (г) цикли вищих порядків та каскад біфуркацій подвоєння.

Подальше підвищення взаємозамінності призводить до зникнення квазіперіодичних режимів.

Висновки. У роботі визначено стан рівноваги за Нешем у просторовій дуополії, коли одна з фірм встановлює обсяг пропозиції, а інша встановлює ціну. Отримано, що у рівноважному стані дуополії Курно-Бертрана фірмі *i* вигідно щоб фірма *j* конкурувала за Курно, а фірмі *j* вигідно, щоб фірма *i* конкурувала за Бертраном.

Визначена залежність області стійкості рівноваги від асиметрії розмірів ринків. Отримано, що площа області стійкості обернено пропорційна асиметрії ринків. Зростання асиметрії стискає область стійкості по осі β, та навпаки. Таким чином, асиметрія ринків має двоякий ефект. Високий рівень асиметрії, з одного боку, збільшує попит на *L*-ринку, а з іншого боку, зменшує область стійкості ринкової рівноваги.

Встановлена залежність області стійкості рівноваги від продуктової диференціації. Отримано, що зростання рівня взаємозамінності (взаємодоповнюваності) збільшує (зменшує) площу області стійкості. Високий рівень взаємозамінності підсилює рівень конкуренції між фірмами та, одночасно, збільшує площу області стійкості. Високий рівень взаємодоповнюваності мотивує фірми до агломерації та, одночасно, зменшує стійкість такої рівноваги.

Подальші дослідження пов’язані з аналізом стійкості рівноваги в умовах інформаційної асиметрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Singh N., Vives X. Price and quantity competition in a differentiated duopoly. *Rand Journal of Economics.* 1984. N 15. pp. 546–554.
2. Anderson S., Neven D. Cournot competition yields spatial agglomeration. *International Economic Review.* 1991. V. 32. N 4. pp. 793–808.
3. Hamilton J., Thisse J.-F., Weskamp A. Spatial discrimination, Bertrand vs. Cournot in a model of location choice. *Regional Science and Urban Economics*. 1989. N 19. pp. 87–102.
4. Melnikov S.V. Location choice of firms under Stackelberg information asymmetry. *Transport & Logistics*. 2018. № 18(44). С. 35–44.
5. Melnikov S.V. Cournot competition yields spatial dispersion. Розвиток транспорту. 2019. № 1(4). С. 57–70.
6. Melnikov S.V. Stackelberg-Nash equilibrium in the linear city model. *Automation and Remote Control.* 2020. № 81(2). pp. 358–365.
7. Мельников С.В. Конкуренція за Курно та Бертраном в умовах просторової дуополії з асиметричними ринками. *Розвиток транспорту.* 2021. № 3(10). С. 7–18.
8. Sun C.-H. Cournot and Bertrand competition in a model of spatial price discrimination with differentiated products. *The B.E. of Theoretical Economics*. 2014. № 14. pp. 251–272.
9. Мельников С.В. Рівноваги у просторовій дуополії: асиметрія ринків vs. продуктова диференціація. *Розвиток транспорту.* 2022. № 3(14). С. 9–24.
10. Liang W.J., Hwang H., Mai C.C. Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot with asymmetric demands. *Regional Science and Urban Economics.* 2006. № 36. pp. 790–802.
11. Bylka, S., & Komar, J. Cournot-Bertrand mixed oligopolies. In M.W. Los, J. Los and A. Wieczorek (eds), Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics, (pp. 22–33). New York : Springer-Verlag, 1975.
12. Tremblay C.H., Tremblay V.J. The Cournot-Bertrand model and the degree of product differentiation. *Economics Letters.* 2011. № 111, pp. 233–235.
13. Wang H., Ma J. Complexity analysis of a Cournot-Bertrand duopoly game model with limited information. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2013. № 3, pp. 1–6.
14. Ma J., Wang H. Complex dynamics analysis for a Cournot-Bertrand mixed game model with delayed bounded rationality. *Abstract and Applied Analysis*. 2013. № 10. pp. 1–11.
15. Naimzada A. K., Tramontana F. Dynamic properties of a Cournot-Bertrand duopoly game with differentiated products. *Economic Modelling*, 2012. № 290. pp. 1436–1439.
16. Dixit A. Comparative statics for oligopoly. *International Economic Review.* 1986. № 27(1), pp. 107–122.

REFERENCES

1. Singh, N., & Vives, X. (1984). Price and quantity competition in a differentiated duopoly. Rand Journal of Economics, 15, 546–554.
2. Anderson, S., & Neven, D. (1991). Cournot Competition Yields Spatial Agglomeration. International Economic Review, 32(4), 793–808.
3. Hamilton, J., Thisse, J.-F., & Weskamp, A. (1989). Spatial discrimination, Bertrand vs. Cournot in a model of location choice. Regional Science and Urban Economics, 19, 87–102.
4. Melnikov, S.V. (2018). Location choice of firms under Stackelberg information asymmetry. Transport & Logistics, 18(44), 35–44.
5. Melnikov, S.V. (2019). Cournot Competition Yields Spatial Dispersion. Transport Development, 1(4), 57–70.
6. Melnikov, S.V. (2020). Stackelberg-Nash Equilibrium in the Linear City Model. Automation and Remote Control, 81(2), 358–365.
7. Melnikov S.V. (2021). Cournot and Bertrand competition under spatial duopoly with asymmetric markets [Konkurentsiia za Kurno ta Bertranom v umovakh prostorovoi duopolii z asymetrychnymy rynkamy]. Transport Development, 3(10), 7–18 [in Ukrainian].
8. Sun, C.-H. (2014). Cournot and Bertrand competition in a model of spatial price discrimination with differentiated products. The B.E. of Theoretical Economics, 14, 251–272.
9. Melnikov S.V. (2022). Equilibria in a spatial duopoly: market asymmetry vs. product differentiation [Rivnovahy u prostorovii duopolii: asymetriia rynkiv vs. produktova dyferentsiatsiia]. Transport Development, 3(14), 9–24 [in Ukrainian].
10. Liang, W.J., Hwang, H., & Mai, C.C. (2006). Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot with asymmetric demands. Regional Science and Urban Economics, 36, 790–802.
11. Bylka, S., & Komar, J. (1975). Cournot-Bertrand mixed oligopolies. In M.W. Los, J. Los and A. Wieczorek (eds), Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics, (pp. 22–33). New York: Springer-Verlag.
12. Tremblay, C.H. & Tremblay, V.J. (2011). The Cournot-Bertrand model and the degree of product differentiation. Economics Letters, 111, 233–235.
13. Wang, H. & Ma, J. (2013). Complexity analysis of a Cournot-Bertrand duopoly game model with limited information. Discrete Dynamics in Nature and Society, 3, 1–6.
14. Ma, J. & Wang, H. (2013). Complex dynamics analysis for a Cournot-Bertrand mixed game model with delayed bounded rationality. Abstract and Applied Analysis, 10, 1–11.
15. Naimzada, A. K. & Tramontana, F. (2012). Dynamic properties of a Cournot-Bertrand duopoly game with differentiated products. Economic Modelling, 290, 1436–1439.
16. Dixit, A. (1986). Comparative statics for oligopoly. International Economic Review, 27(1), 107–122.