

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ
НА ПОВЕРХНІ ПЛІВКИ РІДИНИ, ЩО СТІКАЄ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН
НА ПОВЕРХНОСТИ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЁНКИ ЖИДКОСТИ**

**MATHEMATICAL DESIGN OF NONLINEAR WAVES
ON SURFACE OF FLOWING DOWN TAPE OF LIQUID**

В.Х. КИРИЛЛОВ¹, докт.техн.наук,
А.К. ШИРШКОВ²,

¹Одесская национальная академия пищевых технологий, Украина

²Одесский национальный морской университет, Украина

Наведено результати проведеного математичного моделювання нелінійних хвиль на поверхні плівки рідини, що стікає, за допомогою застосування програмного комплексу Matlab. Описано рівняння прикордонного шару, виділений оптимальний хвильовий режим, при якому витрата рідини має максимальне значення.

Ключові слова: математичні моделювання нелінійних хвиль, плівкова течія, нелінійне хвилеутворення.

Приведены результаты проведенного математического моделирования нелинейных волн на поверхности стекающей пленки жидкости с помощью применения программного комплекса Matlab. Описаны уравнения пограничного слоя, выделен оптимальный волновой режим, при котором расход жидкости имеет максимальное значение.

Ключевые слова: математическое моделирование нелинейных волн, пленочное течение, нелинейное волнообразование.

The paper includes results of the mathematical modeling of nonlinear waves on the surface of a flowing liquid film are presented using the Matlab software package. The equations of the boundary layer are described, the optimum wave regime is selected, at which the liquid flow rate has the maximum value.

Keywords: mathematical modeling of nonlinear waves, film flow, nonlinear wave formation.

Введение. Математическое моделирование является в настоящее время одним из самых актуальных направлений в научных исследованиях.

Выбор тех или иных математических моделей при описании и исследовании физических процессов и объектов зависит от их особенностей и характеристик.

Актуальность. Исследование поведения нелинейных волн на поверхности стекающей пленки жидкости путем организации экспериментов на базе проведения математического моделирования является актуальной задачей для современной науки, в частности, в области гидродинамики.

Цель работы. Применение программного комплекса Matlab и аппарата математического моделирования для исследования поведения нелинейных волн на поверхности стекающей пленки жидкости.

Основной материал. Течение тонкого слоя вязкой жидкости по наклонной поверхности (рис.1) описывается уравнениями пограничного слоя [1; 2] (1) и (2).

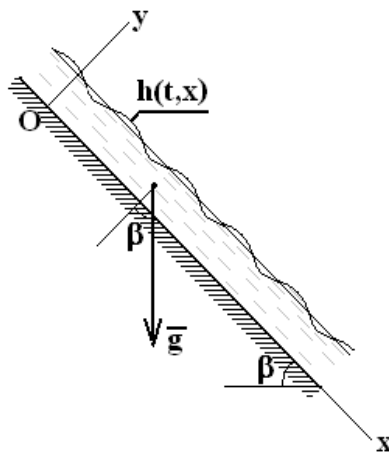


Рис. 1. Схема плёночного течения

Уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin \beta \quad (1)$$
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \beta = 0$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Граничные условия при $y = h(t, x)$ имеют вид

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}; \quad p + \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = p_0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

На наклонной поверхности при $y = 0$ имеет место условие прилипания

$$u = v = 0 \quad (4)$$

Уравнения (1)-(2) и граничные условия (3)-(4) после соответствующих преобразований [3] сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно неизвестных функций $q(t, x) = \int_0^h u dy$ – расход жидкости и $h = h(t, x)$ – локальная толщина плёнки

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2,4qh \frac{\partial q}{\partial x} - 1,2q^2 \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - 3\nu q - g h^3 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cos \beta - \sin \beta \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Приводя обезразмеривание данной системы (5)-(6) для стационарных волн, имеем $h(\xi) = h(x - ct)$, $q(\xi) = q(x - ct)$.

Для профиля волны $H = H(x_1)$ имеем следующее дифференциальное уравнение [4], содержащее три параметра Δ , D и φ

$$H''' + \frac{\Delta}{H} \left[6 \frac{(1-D)^2}{H^2} - D^2 - \varphi H \right] H' + \frac{H^3 - DH + D - 1}{H^3} = 0. \quad (7)$$

Выделим оптимальный волновой режим, при котором расход жидкости имеет максимальное значение (именно этот режим наблюдается при эксперименте).

В результате задача математического моделирования нелинейных волнообразований сводится к задаче Коши при условии периодичности (λ – длина волны)

$$H(0) = H(\lambda), \quad H'(0) = H'(\lambda), \quad H''(0) = H''(\lambda). \quad (8)$$

Начальная точка $\xi = 0$ выбирается в соответствии с вершиной волны при $\xi = 0$, $H'(0) = 0$.

Дифференциальное уравнение (7) сводится к системе трёх уравнений первого порядка, численное решение которой ищется методом Рунге-Кутты (решатель ode45 системы компьютерной математики Mat Lab).

Для выявления периодического решения проводится вычислительный эксперимент.

Неизвестные величины $H(0)$, $H''(0)$ подбираются так, чтобы невязки $H(0) - H(\lambda)$, $H'(0) - H'(\lambda)$, $H''(0) - H''(\lambda)$ достигали наименьших значений.

В качестве начального приближения использовались Δ и $D > 3$ для положительного солитона при $\lambda = \infty$ [3]. Затем решение продолжается в сторону меньших λ .

Результаты численных экспериментов представлены на рисунках 2-5 для формы свободной поверхности $H = H(\xi)$

$$\text{I. } \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 4868,1, \quad \varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 14.9517, & D &= 7.31, & \Delta &= 0.06 \\ H(0) &= 2.98971, & H'(0) &= 0, & H''(0) &= -0.404 \\ H(\lambda) &= 2.9903, & H'(\lambda) &= 0.0338, & H''(\lambda) &= -0.455 \\ H_{\min} &= 0.7001, & \lambda &= 21,3497 \end{aligned}$$

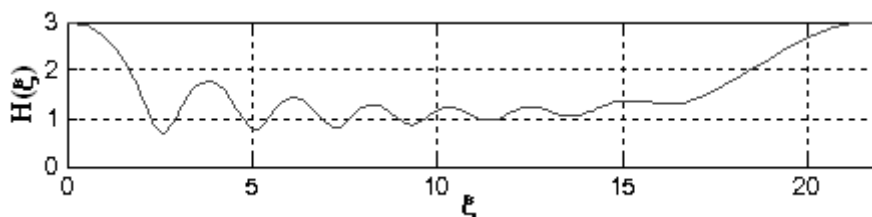


Рис. 2. Угол наклона поверхности 90°

$$\text{II. } \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 5107.2, \quad \varphi = 1.2573$$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 14.9517, & D &= 7.31, & \Delta &= 0.059 \\ H(0) &= 2.8977, & H'(0) &= 0, & H''(0) &= -0.4 \\ H(\lambda) &= 2.8982, & H'(\lambda) &= 0.0214, & H''(\lambda) &= -0.4416 \\ H_{\min} &= 0.7129, & \lambda &= 16,9426 \end{aligned}$$

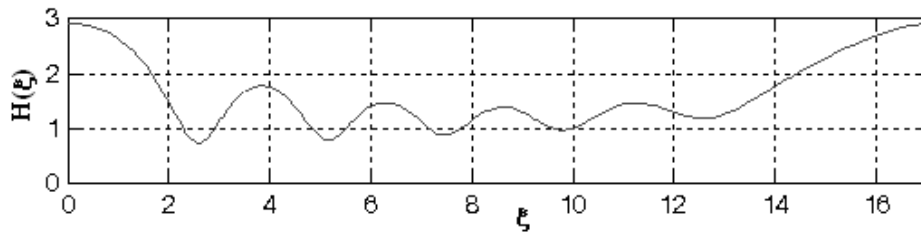


Рис. 3. Угол наклона поверхности 60°

III. $\beta = 45^{\circ}$, $\gamma = 5464.3$, $\varphi = 2.1778$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 14.9517, & D &= 7.31, & \Delta &= 0.0577 \\ H(0) &= 2.6166, & H'(0) &= 0, & H''(0) &= -0.4009 \\ H(\lambda) &= 2.6125, & H'(\lambda) &= -0.0173, & H''(\lambda) &= -0.6474 \\ H_{\min} &= 0.8384, & \lambda &= 13.949 \end{aligned}$$

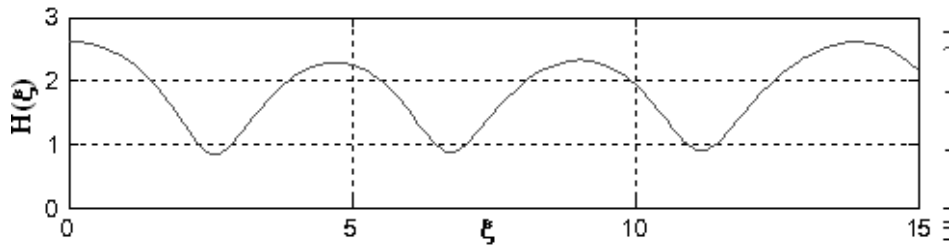


Рис. 4. Угол наклона поверхности 45°

IV. $\beta = 30^{\circ}$, $\gamma = 6133.4$, $\varphi = 3.772$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 14.9517, & D &= 7.31, & \Delta &= 0.0556 \\ H(0) &= 2.5491, & H'(0) &= 0, & H''(0) &= -0.5 \\ H(\lambda) &= 2.5142, & H'(\lambda) &= 0.0049, & H''(\lambda) &= -0.51 \\ H_{\min} &= 0.808, & \lambda &= 8.9612 \end{aligned}$$

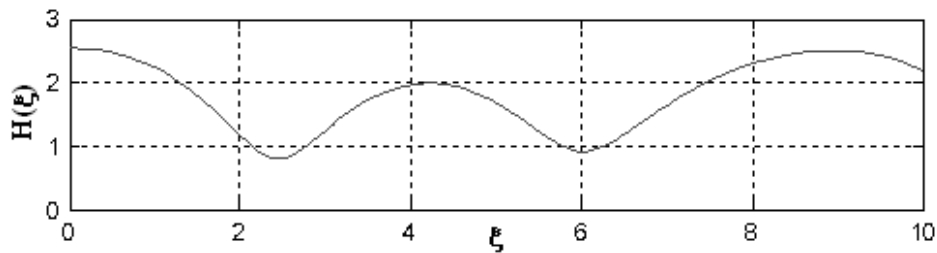


Рис. 5. Угол наклона поверхности 30°

Выводы. Из рисунков 1-5 видно, что нелинейные волнообразования имеют солитонный характер при больших углах наклона, при малых углах наклона ($\beta < 45^\circ$) нелинейные волнообразования имеют форму катящихся волн большой амплитуды.

При проектировании плёночных теплообменников необходимо иметь в виду, что малые углы наклона поверхности могут приводить к интенсивному каплеуносу жидкости из рабочей зоны аппарата и неустойчивости плёнки жидкости с образованием осушённой части рабочей поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов В.Х. Гидродинамика и теплообмен в двухфазных потоках плёночных аппаратов для холодильной техники: Автореф. докт. дис. / В.Х. Кириллов. – Одесса, 1994.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
3. Кириллов В.Х. Компьютерная математика в среде Math. Теория и практика / В.Х. Кириллов, А.К. Шириков. – Одесса: Изд-во ВМВ. 2015. – 312 с.
4. Кириллов В.Х. Компьютерное моделирование физических и технологических процессов. Теория, алгоритмы, программы: Учебн. пособие / В.Х. Кириллов, В.В. Зуб, А.С. Титлов, А.К. Шириков. – Одесса: Изд-во ВМВ, 2016. – 346 с.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2017